

9.00-11.00

--

--	--	--	--	--	--	--

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is $(\text{score}+6)/6$.

- Prove that $13^n - 6^n$ is a multiple of 7 for all $n \in \mathbb{N}$.

- 2 Laat R een relatie zijn op een verzameling A . We nemen aan dat R symmetrisch en transitief is. Vind de fout in het volgende bewijs. Het is niet de bedoeling dat je laat zien waarom de bewering fout is, maar dat je aangeeft welke zin of welk stukje zin niet klopt, en waarom. 4

Bewering: aRa voor alle $a \in A$ (d.w.z. R is reflexief).

Bewijs: Stel dat aRb . Dan geldt er ook bRa , want R is symmetrisch. Nu geldt er aRb en bRa , dus uit transitiviteit van R volgt dat aRa voor alle $a \in A$.

Let R be a relation on a set A . Assume R is symmetric and transitive.

Find the error in the following proof. You are not meant to show the statement is false, but to indicate which sentence or part of a sentence is wrong and why.

Statement: aRa for all $a \in A$ (i.e. R is reflexive).

Proof: Suppose aRb . Then also bRa , since R is symmetric. Then aRb and bRa , so using transitivity it follows that aRa for all $a \in A$.

- 3a Zij $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, en C_1, C_2 zijn deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. 4
Geef een tegenvoorbeeld voor de volgende bewering: Als $f(C_1) = f(C_2)$, dan $C_1 = C_2$.

Let $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, and let C_1, C_2 be subsets of $\mathbb{N}$.

Give a counterexample to the following statement: If $f(C_1) = f(C_2)$, then $C_1 = C_2$.

2

7

5a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$.
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

5b $S \subseteq \mathbb{R}$ is een niet-lege begrensde verzameling met $x = \sup S$.
Bewijs: als $x \notin S$, dan is x een verdichtingspunt van S .

Let $S \subseteq \mathbb{R}$ be a non-empty bounded set with $x = \sup S$. Prove: if $x \notin S$, then x is an accumulation point of S .

- 6a (s_n) is een rij en $s \in \mathbb{R}$. Geef de definitie van $\lim s_n = s$.
 (s_n) is a sequence and $s \in \mathbb{R}$. Give the definition of $\lim s_n = s$.

2

- 6b Bepaal de limiet / Determine the limit

2

$$\lim \frac{2n^2 - 4n + 5}{3n^2 + 6}$$

U mag de rekenregels voor limieten en de uitkomst van $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k$ (voor een vaste k) gebruiken.

You can use the rules of calculation for limits and the result of $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k$ (for a fixed k).

6c Bewijs met behulp van de definitie van limiet dat / Use the definition of limit to prove 7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - 5} = 0.$$

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)