Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als … 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if …

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0, \infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0, \infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1, \infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1, \infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0, 1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0, 1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise ☐ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als . . . 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if . . .

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx+1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0,\infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0,\infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1,\infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1,\infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0,1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0,1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise ____ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0, \infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0, \infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1, \infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1, \infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0, 1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0, 1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise ☐ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10
Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx+1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0,\infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0,\infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1,\infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1,\infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0,1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0,1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c \,:\, a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c \,:\, a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx+1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0,\infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0,\infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1,\infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1,\infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0,1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0,1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise ____ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c \,:\, a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c \,:\, a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0, \infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0, \infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1, \infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1, \infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0, 1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0, 1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise ____ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise ☐ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A\cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A\cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx+1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0,\infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0,\infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1,\infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1,\infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0,1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0,1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise ______ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A\cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A\cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c \,:\, a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c \,:\, a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx+1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0,\infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0,\infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1,\infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1,\infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0,1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0,1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise ☐ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A\cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A\cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c \, : \, a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c \, : \, a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0, \infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0, \infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1, \infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1, \infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0, 1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0, 1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise ___ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c \,:\, a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c \,:\, a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0,1) \cup [2,3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0,1) \cup [2,3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0, \infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0, \infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1, \infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1, \infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0, 1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0, 1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A\cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A\cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx+1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0,\infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0,\infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1,\infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1,\infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0,1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0,1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2

Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4

Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3

Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0, \infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0, \infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1, \infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1, \infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0, 1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0, 1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise ☐ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx+1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0,\infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0,\infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1,\infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1,\infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0,1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0,1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise ☐ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A\cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A\cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0,1) \cup [2,3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0,1) \cup [2,3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0, \infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0, \infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1, \infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1, \infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0, 1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0, 1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A\cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A\cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx+1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0,\infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0,\infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1,\infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1,\infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0,1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0,1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise ☐ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als . . . 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if . . .

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c \,:\, a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c \,:\, a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0,1) \cup [2,3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0,1) \cup [2,3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx+1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0,\infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0,\infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1,\infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1,\infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0,1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0,1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise ______ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2 + 2}{2n^2 + n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0, \infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0, \infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1, \infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1, \infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0, 1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0, 1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+10)/10. Vraag om extra papier als ook de extra ruimte vol is, kladpapier wordt niet nagekeken.

No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+10)/10. Ask for an extra sheet if you need more space beyond the extra space. Scratch paper will not be graded.

Opgave / Exercise ☐ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$ 8

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. 2

2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door $A\mathsf{R}B$ als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.
The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by $A\mathsf{R}B$ if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive: 2

2b Symmetrisch / Symmetric: 2

2c Transitief / Transitive: 2

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \to B$ is *injectief* als ... 2
Complete the definition. The function $f : A \to B$ is *injective* if ...

3b Neem aan dat $f : B \to C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \to B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$. 4
Let $f : B \to C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \to B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is. 3
Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$. 2
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$. 6
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.
Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by 6

$$a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.
Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$. 6
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$. 2
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten. Geef aan wat de verdichtingspunten van uw voorbeeld zijn, u hoeft echter niet te bewijzen dat dit echt de verdichtingspunten zijn van uw voorbeeld. 3
Give an example of a set with exactly two accumulation points. Also give the accumulation points of your set, but you do not have to prove that these are all the accumulation points.

7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T. 6
Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T.

8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als . . . 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if . . .

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is. 6
Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert. Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is. 10

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

10 De functies $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in (0, \infty)$. 2
Determine the limit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ for $x \in (0, \infty)$.

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1, \infty)$. 4
Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1, \infty)$.

10c Convergeert (f_n) uniform naar f op $(0, 1]$? (Beargumenteer!) 2
Does (f_n) converge uniformly to f on $(0, 1]$? (Give arguments!)

11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n). Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S, d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.
Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n). Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S, i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2
Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3
Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3