



Hertentamen / Resit
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Vrijdag 16 maart 2018 / Friday March 16, 2018
13.30-16.30

1a Bewijs met behulp van inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ / Prove using induction that for all $n \in \mathbb{N}$

8

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

We bewijzen met inductie dat $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$. Voor $n = 1$ staat er links $\sum_{j=1}^1 \frac{1}{j^2} = \frac{1}{1^2} = 1$ en rechts staat er $2 - \frac{1}{1} = 1$ en inderdaad is $1 \leq 1$, dus de ongelijkheid klopt voor $n = 1$.

Stel dat $\sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$. Dan is

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j^2} &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \frac{(k+1)^2 - k}{k(k+1)^2} \\ &= 2 - \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)^2} \leq 2 - \frac{k^2 + k}{k(k+1)^2} = 2 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Derhalve is de uitspraak ook waar voor $n = k + 1$.

Met behulp van inductie zien we nu dat de ongelijkheid waar is voor alle $n \in \mathbb{N}$.

1b Bewijs dat $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. / Prove that $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$.

2

Merk op dat de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ convergeert omdat het een p -reeks is. Wegens de stelling dat $\lim a_n \leq \lim b_n$ als $a_n \leq b_n$ en beide convergente rijtjes zijn, volgt dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{n} = 2.$$



2 De relatie R op $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is gedefinieerd door ARB als $A \cap B \neq \emptyset$. Ga na of R reflexief / symmetrisch / transitief is.

The relation R on $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ is defined by ARB if $A \cap B \neq \emptyset$. Determine if R is reflexive / symmetric / transitive.

2a Reflexief / Reflexive:

2

De relatie is niet reflexief. Als $A = \emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ geldt $A \cap A = \emptyset$, en dus is ARA niet waar.

2b Symmetrisch / Symmetric:

2

De relatie is wel symmetrisch. Laat $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ willekeurige verzamelingen zijn zodat ARB . Dan is $A \cap B \neq \emptyset$, en dus ook $B \cap A = A \cap B \neq \emptyset$. Derhalve is ook BRA waar.

2c Transitief / Transitive:

2

De relatie is niet transitief. Neem $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ en $C = \{2\}$. Dan is $A \cap B = \{1\}$ en dus ARB is waar. Bovendien is $B \cap C = \{2\}$ en dus BRC is waar. Echter $A \cap C = \emptyset$ en dus is ARC niet waar.

3a Maak de definitie af. De functie $f : A \rightarrow B$ is *injectief* als ...

2

Complete the definition. The function $f : A \rightarrow B$ is *injective* if ...

voor alle $a_1, a_2 \in A$ geldt dat als $f(a_1) = f(a_2)$ dan is $a_1 = a_2$.

3b Neem aan dat $f : B \rightarrow C$ een injectieve functie is, en dat $g, h : A \rightarrow B$ functies zijn zodanig dat $f \circ g = f \circ h$. Bewijs dat $g(a) = h(a)$ voor alle $a \in A$.

4

Let $f : B \rightarrow C$ be an injective function, and suppose that $g, h : A \rightarrow B$ are functions such that $f \circ g = f \circ h$. Prove that $g(a) = h(a)$ for all $a \in A$.

Laat $a \in A$ willekeurig. Dan is $f(g(a)) = f \circ g(a) = f \circ h(a) = f(h(a))$. Omdat f injectief is volgt hieruit meteen dat $g(a) = h(a)$.

3c Laat met een voorbeeld zien dat de uitspraak in opgave 3b niet waar hoeft te zijn als f niet injectief is.

3

Give an example that shows that the statement in question 3b may be false if f is not injective.

Neem $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$ en $C = \{4\}$, met $g(1) = 2$, $h(1) = 3$ en $f(2) = 4$ en $f(3) = 4$. Dan is $f \circ g(1) = f(2) = 4$ en $f \circ h(1) = f(3) = 4$, dus $f \circ g$ en $f \circ h$ zijn gelijk op het domein A . Echter $g(1) \neq h(1)$.

Alternatief voorbeeld: $A = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $B = C = \mathbb{R}$ en $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ en $h(x) = -\sqrt{x}$.



- 4a Formuleer het *volledigheidsaxioma* voor $\mathbb{R}$.
Formulate the *completeness axiom* for $\mathbb{R}$.

2

Elke niet-lege van boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft een supremum.

- 4b Laat A een niet-lege begrensde verzameling in $\mathbb{R}$ zijn, $c \in \mathbb{R}$ en $B = \{a + c : a \in A\}$.
Let A be a nonempty bounded subset of $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ and $B = \{a + c : a \in A\}$.

6

Bewijs dat / Prove that

$$\sup B = \sup A + c.$$

We laten eerst zien dat $\sup(A) + c$ een bovengrens is voor B . Inderdaad, kies $b \in B$. Dan is er een $a \in A$ zodat $b = a + c$. Aangezien $a \leq \sup(A)$ volgt dus dat $b \leq \sup(A) + c$. Hiermee hebben we aangetoond dat $\sup(A) + c$ een bovengrens is.

Neem nu een $x < \sup(A) + c$. Dan is $x - c < \sup(A)$ dus er is een $a \in A$ met $x - c < a$. Dan geldt dat $a + c \in B$ en $a + c > x$. Derhalve is x geen bovengrens voor B .

We concluderen dat $\sup(A) + c$ inderdaad het supremum is van B .

- 5 De rij (a_n) is gedefinieerd door / The sequence (a_n) is defined by

6

$$a_n = \frac{n^2 + 2}{2n^2 + n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met de definitie van convergentie dat (a_n) convergeert.

Use the definition of convergence to show that (a_n) converges.

We laten zien dat $\lim a_n = \frac{1}{2}$. [NB we hebben de limiet gevonden door de rekenregels uit te voeren: $\lim \frac{n^2+2}{2n^2+n} = \lim \frac{1+2/n^2}{2+1/n} = \frac{1}{2}$. Maar waar we die $\frac{1}{2}$ vandaan krijgen is niet van belang als je netjes bewijst dat de limiet inderdaad goed is.]

Zij $\epsilon > 0$. Kies $N = \max(4, \frac{1}{4\epsilon})$. Dan is voor alle $n > N$

$$|a_n - \frac{1}{2}| = \left| \frac{n^2 + 2}{2n^2 + n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{4 - n}{4n^2 + 2n} \right| \leq \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n} < \frac{1}{4N} \leq \epsilon,$$

waar we gebruiken dat $|4 - n| = n - 4 < n$ aangezien $n > N \geq 4$. Inderdaad is dus $\lim a_n = \frac{1}{2}$.

- 6 Neem aan dat $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Bewijs dat $\lim a_n b_n = ab$.
Suppose $\lim a_n = a$ and $\lim b_n = b$. Prove that $\lim a_n b_n = ab$.

6

Stel $\lim a_n = a$ en $\lim b_n = b$. Merk op dat de rij a_n begrensd omdat hij convergent is, zeg $|a_n| < M$ voor alle n . Zij $\epsilon > 0$. Kies N_1 zo dat voor alle $n > N_1$ geldt $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2M}$. Kies N_2 zo dat voor alle $n > N_2$ geldt dat $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2|b|+1}$. Neem nu $N = \max(N_1, N_2)$. Dan geldt voor alle $n > N$ dat

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| < M \frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2|b|+1} |b| < \epsilon$$

Derhalve is $\lim a_n b_n = ab$ zoals gewenst.



- 7a Geef de definitie van een *verdichtingspunt* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$.
Give the definition of an *accumulation point* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$.

2

Een verdichtingspunt van S is een $x \in \mathbb{R}$ zo dat voor alle $\epsilon > 0$ geldt dat $N^*(x; \epsilon) \cap S \neq \emptyset$.

- 7b Geef een voorbeeld van een verzameling met precies twee verdichtingspunten.
Give an example of a set with exactly two accumulation points.

3

Neem $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Dan zijn zowel 0 als 1 verdichtingspunten.

- 7c Laat s een verdichtingspunt van $S \cup T$ zijn. Bewijs dat s een verdichtingspunt is van S of van T .

6

Let s be an accumulation point of $S \cup T$. Prove that s is an accumulation point of S or of T .

We bewijzen de contrapositie: Als s geen verdichtingspunt is van S en niet van T , dan is s ook geen verdichtingspunt van $S \cup T$. Als s geen verdichtingspunt is van S , dan is er een $\epsilon_1 > 0$ zodat $N^*(s; \epsilon_1) \cap S = \emptyset$. Als s ook geen verdichtingspunt is van T is er ook een $\epsilon_2 > 0$ zodat $N^*(s; \epsilon_2) \cap T = \emptyset$. Maar dan is voor $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ ook

$$N^*(s; \epsilon) \cap (S \cup T) = (N^*(s; \epsilon) \cap S) \cup (N^*(s; \epsilon) \cap T) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

We concluderen dat s geen verdichtingspunt van $S \cup T$ is.



8a Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ...

2

Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

elke open overdekking van S een eindige deelooverdekking heeft.

8b Laat met behulp van de definitie zien dat $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ niet compact is.

6

Use the definition to show that $S = [0, 1) \cup [2, 3]$ is not compact.

Definieer de verzamelingen $U_n = (-1, 1 - \frac{1}{n}) \cup (1, 4)$. Dan is $\mathcal{F} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ een open overdekking van S . Inderdaad is elke U_n open. Als $s \in S$ is ofwel $s \in [2, 3]$ en dan is $s \in U_1$, ofwel $s \in [0, 1)$ in welk geval $1 - s > 0$ en dus is er een natuurlijk getal n is met $\frac{1}{n} < (1 - s)$. Dan is $0 \leq s < 1 - \frac{1}{n}$ en dus $s \in U_n$. Inderdaad overdekt $\mathcal{F}$ dus S .

Laat $\mathcal{G}$ een eindige deelverzameling van $\mathcal{F}$ zijn: we schrijven $\mathcal{G} = \{U_{n_1}, \dots, U_{n_k}\}$. Definieer $m = \max(n_1, \dots, n_k)$. Aangezien $U_n \subseteq U_m$ als $n \leq m$ volgt dat $\bigcup_{j=1}^k U_{n_j} = U_m$. Maar dan is $1 - \frac{1}{m} \in S$, maar $1 - \frac{1}{m} \notin U_m$. Dus $\mathcal{G}$ is geen overdekking van S .

We concluderen dat er geen eindige deelooverdekking bestaat van $\mathcal{F}$, en dus is S niet compact.

9 Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ convergeert en voor welke x hij divergeert.

10

Geef voor elke x waarvoor de reeks convergeert ook aan of de convergentie relatief of absoluut is.

Determine for which $x \in \mathbb{R}$ the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{6x-1}{3}\right)^n$ converges and for which $x \in \mathbb{R}$ it diverges. For each x for which the series converges also indicate whether that convergence is conditional or absolute.

We herschrijven de reeks eerst tot $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} 2^n (x - \frac{1}{6})^n$. Dan zien we dat het centrum van de reeks $c = \frac{1}{6}$ is. Voor de convergentiestraal gebruiken we het quotiëntenkenmerk:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{n}{n+1} 2^n \frac{n+2}{n+1} 2^{-n-1} = \lim \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \frac{1}{2} = \lim \frac{1 + 2/n}{1 + 2/n + 1/n^2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dus we zien dat de reeks absoluut convergeert op het interval $(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}, \frac{1}{6} + \frac{1}{2}) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Bovendien divergeert de reeks voor $x < -\frac{1}{3}$ en voor $x > \frac{2}{3}$.

We moeten nog de twee randpunten bekijken. Voor $x = -\frac{1}{3}$ wordt de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (-1)^n$. Deze reeks divergeert want de termen convergeren niet naar 0. Net zo is de reeks voor $x = \frac{2}{3}$ gegeven door $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ divergent omdat de termen ook hier niet naar 0 convergeren.

We concluderen dat de reeks absoluut convergeert op $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ en overal elders divergeert.



10 De functies $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zijn gegeven door / The functions $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ are given by

$$f_n(x) = \frac{nx + 1}{nx^2}.$$

10a Bepaal de limiet $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ voor $x \in (0, \infty)$.

2

Determine the limit $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ for $x \in (0, \infty)$.

We krijgen

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx + 1}{nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + 1/n}{x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

10b Laat zien dat (f_n) uniform convergeert naar f op $[1, \infty)$.

4

Show that (f_n) converges uniformly to f on $[1, \infty)$.

Zij $\epsilon > 0$. Neem $N = 1/\epsilon$. Dan is voor $n > N$ en alle $x \in [1, \infty)$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx + 1}{nx^2} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{nx^2} < \frac{1}{N} = \epsilon.$$

Dus de convergentie is uniform.

10c Converteert (f_n) uniform naar f op $(0, 1]$? (Beargumenteer!)

2

Does (f_n) converge uniformly to f on $(0, 1]$? (Give arguments!)

Deze convergentie is niet uniform. Neem $\epsilon = 1$, en een willekeurige N . Dan is voor $n = N + 1 > N$ en $x = \frac{1}{n}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n^{\frac{1}{n}} + 1}{n(\frac{1}{n})^2} - \frac{1}{\frac{1}{n}} \right| = 2n - n = n > 1 = \epsilon.$$



11 Laat S de verzameling zijn van deelrijlimieten van een rij (s_n) . Neem aan dat $S \neq \emptyset$, en laat (t_n) een rij zijn in S , d.w.z. $t_n \in S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, met $\lim t_n = t$.

Let S denote the set of subsequential limits of a sequence (s_n) . Assume $S \neq \emptyset$, and let (t_n) be a sequence in S , i.e. $t_n \in S$ for all $n \in \mathbb{N}$, with $\lim t_n = t$.

11a Laat zien dat er een n_1 bestaat zó dat $|s_{n_1} - t_1| < 1$. 2

Show that there exists an n_1 such that $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

Aangezien $t_1 \in S$ is er een deelrij (s_{m_k}) van (s_n) die convergeert naar t_1 . Voor $\epsilon = 1$ is er dan een K zodat voor alle $k > K$ geldt dat $|s_{m_k} - t_1| < \epsilon = 1$. Kies nu $n_1 = m_{K+1}$, dan geldt inderdaad $|s_{n_1} - t_1| < 1$.

11b Laat zien dat er een deelrij (s_{n_k}) bestaat zó dat $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$. 3

Show that there exists a subsequence (s_{n_k}) such that $|s_{n_k} - t_k| < \frac{1}{k}$.

We construeren de deelrij recursief. De eerste term in de rij kunnen we vinden met behulp van opgave a. Laat nu de deelrij tot en met $s_{n_{k-1}}$ gedefinieerd zijn (of eigenlijk de rij indices (n_k) is gedefinieerd tot en met n_{k-1}). Aangezien t_k een deelrijlimiet is, is er een deelrij (s_{m_j}) (anders dan die uit a!) die convergeert naar t_k . Voor $\epsilon = \frac{1}{k}$ is er dan een J zo dat voor alle $j > J$ geldt $|s_{m_j} - t_k| < \frac{1}{k}$. Omdat de rij m_j voor elke deelrij onbegrensd is, is er een $m_j > n_{k-1}$ met $j > J$. Kies nu n_k gelijk aan deze m_j . Dan is inderdaad $|s_{n_k} - t_k| = |s_{m_j} - t_k| < \frac{1}{k}$.

11c Bewijs dat $t \in S$. / Prove that $t \in S$. 3

We bewijzen dat de rij $s_{n_k} \rightarrow t$, en omdat dit een deelrij is van (s_n) is t dan dus een deelrijlimiet. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een N_1 zo dat voor alle $n > N_1$ geldt dat $|t_n - t| < \frac{\epsilon}{2}$. Kies dan $N = \max(N_1, \frac{2}{\epsilon})$. Dan geldt voor alle $k > N$ dat

$$|s_{n_k} - t| \leq |s_{n_k} - t_k| + |t_k - t| < \frac{1}{k} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{N} + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dus inderdaad is $\lim_k s_{n_k} = t$.