Toets 2 / Test 2
TW1010 Wiskundige Structuren / Mathematical Structures
Woensdag 13 december 2017 / Wednesday December 13, 2017
14.00-15.00

Vul hieronder je studentnummer, naam en achternaam in.
Fill out your student number, your name, and your family name below.

Student number:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

First name:

Last name:

Rekenmachines zijn niet toegestaan. Vul de antwoorden in de vakken in. Het cijfer is (score+4)/4.
No calculators allowed. Write the solutions in the fields provided. The grade is (score+4)/4.

Opgave / Exercise ☐ voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

Opgave / Exercise [ ] voortgezet (extra ruimte) / continued (extra space)

1a Maak de definitie af. Een *open overdekking* van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is ... 2
Complete the definition. An *open cover* of a set $S \subseteq \mathbb{R}$ is ...

een collectie $\mathcal{F}$ van open verzamelingen, zo dat $S \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$.

a collection $\mathcal{F}$ of open sets, such that $S \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$.

1b Maak de definitie af. Een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* als ... 2
Complete the definition. A set $S \subseteq \mathbb{R}$ is *compact* if ...

Elke open overdekking van S een eindige deeloverdekking heeft.

Every open cover of S has a finite subcover.

1c Laat met behulp van de definitie zien dat het interval $[0, 1)$ niet compact is. 8
Show that the interval $[0, 1)$ is not compact using the definition of compactness.

Definieer $U_n = (-1, 1 - \frac{1}{n})$ en $\mathcal{F} = \{U_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Dan is $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = (-1, 1)$ en dus is $\mathcal{F}$ een open overdekking van $[0, 1)$. Laat $\mathcal{G}$ een eindige deelverzameling van $\mathcal{F}$ zijn, $\mathcal{G} = \{U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_k}\}$. Schrijf $m = \max(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Aangezien de verzamelingen U_n steeds groter worden: $U_s \subseteq U_t$ voor $s \leq t$ zien we dan dat $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = \bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i} = U_m$. Maar dan is $1 - 1/m \in [0, 1)$, terwijl $1 - 1/m \notin U_m$. Dus $\mathcal{G}$ is geen overdekking van $[0, 1)$. We concluderen dat $[0, 1)$ niet compact is.

Define $U_n = (-1, 1 - \frac{1}{n})$ and $\mathcal{F} = \{U_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Then $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = (-1, 1)$ and therefore $\mathcal{F}$ is an open cover of $[0, 1)$. Let $\mathcal{G}$ be a finite subset of $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} = \{U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_k}\}$. Set $m = \max(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Since the sets U_n are increasing: $U_s \subseteq U_t$ for $s \leq t$, we have $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = \bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i} = U_m$. But then $1 - 1/m \in [0, 1)$, while $1 - 1/m \notin U_m$. Thus $\mathcal{G}$ does not cover $[0, 1)$. We conclude that $[0, 1)$ is non-compact.

2a De rij (s_n) is gedefinieerd door / The sequence (s_n) is defined by 8

$$s_1 = 6, \qquad s_{n+1} = \sqrt{8 + 2s_n},\ n \geq 1.$$

Bewijs dat (s_n) convergeert. Je mag gebruiken dat $s_n \geq 0$ voor alle n.
Prove that (s_n) converges. You may use that $s_n \geq 0$ for all n.

We laten zien dat de rij (s_n) dalend is, door met inductie te bewijzen dat $s_{n+1} \leq s_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voor $n = 1$ krijgen we $s_1 = 6$ en $s_2 = \sqrt{8 + 2 \cdot 6} = \sqrt{20}$ en dus $s_2 < s_1$. Stel dat $s_{k+1} \leq s_k$ voor een zekere k. Dan geldt ook

$$s_{k+2} = \sqrt{8 + 2s_{k+1}} \leq \sqrt{8 + 2s_k} = s_{k+1}.$$

Met behulp van inductie hebben we nu aangetoond dat inderdaad $s_{n+1} \leq s_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Merk nu op dat de rij (s_n) dalend is en begrensd is van onderen (want $s_n \geq 0$ voor alle n), dus volgens de monotoneconvergentiestelling convergeert de rij.

We first show that the sequence (s_n) is decreasing, by proving using induction that $s_{n+1} \leq s_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. For $n = 1$ we obtain $s_1 = 6$ and $s_2 = \sqrt{8 + 2 \cdot 6} = \sqrt{20}$ and therefore $s_2 < s_1$. Suppose $s_{k+1} \leq s_k$ for some k. Then we have

$$s_{k+2} = \sqrt{8 + 2s_{k+1}} \leq \sqrt{8 + 2s_k} = s_{k+1}.$$

Using induction we have now shown that indeed $s_{n+1} \leq s_n$ for all $n \in \mathbb{N}$.
Observe that the sequence (s_n) is decreasing and bounded below (as $s_n \geq 0$ for all n), thus the sequence converges by the monotone convergence theorem.

2b Bereken $s = \lim s_n$. / Calculate $s = \lim s_n$.

4

Merk op dat $\lim s_{n+1} = \lim s_n = s$. Dus we krijgen $s = \lim s_{n+1} = \lim \sqrt{8 + 2s_n} = \sqrt{8 + 2 \lim s_n} = \sqrt{8 + 2s}$. Dit geeft $s^2 = 8 + 2s$, ofwel $s^2 - 2s - 8 = 0$, ofwel $(s - 4)(s + 2) = 0$. Dus $s = 4$ of $s = -2$. Omdat alle $s_n \geq 0$ moet ook gelden $\lim s_n \geq 0$, en dus volgt dat $s = 4$.

Observe that $\lim s_{n+1} = \lim s_n = s$. Thus we obtain $s = \lim s_{n+1} = \lim \sqrt{8 + 2s_n} = \sqrt{8 + 2 \lim s_n} = \sqrt{8 + 2s}$. This gives $s^2 = 8 + 2s$, that is $s^2 - 2s - 8 = 0$, which implies $(s - 4)(s + 2) = 0$. So $s = 4$ or $s = -2$. Since $s_n \geq 0$ for all n we have $\lim s_n \geq 0$, thus it follows that $s = 4$.

3a Bereken de som van de reeks of laat zien dat deze divergeert. 4
Evaluate the sum of the given series or show that it diverges.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+2}}{3^{2n}}$$

Dit is een meetkundige reeks. We kunnen hem schrijven als $\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(-\frac{2}{9}\right)^n$. De reden is dus $-2/9$, met absolute waarde kleiner dan 1. Dus de reeks convergeert. De uitkomst is

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+2}}{3^{2n}} = \frac{4}{1-(-2/9)} = \frac{4}{11/9} = \frac{36}{11}.$$

This is a geometric series. We can re-express it as $\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(-\frac{2}{9}\right)^n$. The common ratio thus equals $-2/9$, which has an absolute value less than 1, so the series converges. The result is

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+2}}{3^{2n}} = \frac{4}{1-(-2/9)} = \frac{4}{11/9} = \frac{36}{11}.$$

3b Bepaal of the reeks convergeert of divergeert. 4
Determine whether the series converges or diverges.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-\sqrt{n}}$$

Aangezien $0 \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n-\sqrt{n}}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\sum \frac{1}{2n}$ een divergente harmonische reeks is, is $\sum \frac{1}{2n-\sqrt{n}}$ ook divergent.

As $0 \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n-\sqrt{n}}$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $\sum \frac{1}{2n}$ is a diverging harmonic series, the series $\sum \frac{1}{2n-\sqrt{n}}$ diverges as well.

4 De rij (s_n) heeft de volgende eigenschap: voor iedere $N \in \mathbb{N}$ bestaat er een $n > N$ zo dat $1 < s_n < 2$, ofwel 4

$$\forall N \in \mathbb{N} : \exists n > N : 1 < s_n < 2.$$

Bewijs dat (s_n) een convergente deelrij heeft.

The sequence (s_n) has the following property: for every $N \in \mathbb{N}$ there exists an $n > N$ such that $1 < s_n < 2$, that is

$$\forall N \in \mathbb{N} : \exists n > N : 1 < s_n < 2.$$

Prove that (s_n) has a convergent subsequence.

We definiëren een deelrij van s_n als volgt: Kies n_1 zo dat $1 < s_{n_1} < 2$. Kies daarna $n_2 > n_1$ zo dat $1 < s_{n_2} < 2$; dit kan precies wegens de gegeven eigenschap van de rij. Recursief definiëren we nu n_k zo dat $n_k > n_{k-1}$ en $1 < s_{n_k} < 2$. Dit geeft een begrensde deelrij van (s_n) (door 2), en wegens de stelling van Bolzano-Weierstrass heeft deze een convergente deelrij. Een deelrij van een deelrij is een deelrij van de oorspronkelijke rij, dus dit geeft de gewenste convergente deelrij van (s_n).

We define a subsequence of s_n as follows: Choose n_1 such that $1 < s_{n_1} < 2$. Next choose $n_2 > n_1$ with $1 < s_{n_2} < 2$; this is possible, exactly due to the given property of (s_n). Recursively we define n_k similarly: Insisting on $n_k > n_{k-1}$ and $1 < s_{n_k} < 2$. This gives a bounded subsequence of (s_n) (by 2). Due to the Theorom of Bolzano-Weierstrass, this subsequence has a converging subsequence. A subsquence of a subsequence is a subsequence of the original sequence, so this gives the desired converging subsequence of (s_n).