

Deeltentamen Lineaire Algebra 1, TW1030
 vrijdag 6 november 2015, 09:00-12:00 uur.

Naam:

Cijfer :

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

Dit werk bestaat uit twee delen: kort-antwoord-vragen en open vragen. Bij de open vragen dient elk antwoord te worden beargumenteerd. Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops, formulebladen en dergelijke gebruikt worden. Het cijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten 5 op te tellen en vervolgens te delen door 5.

deel kort antwoord vragen

- (2) **K1.** (a) De oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $(1, 3, -2)$, $(2, 5, 0)$ en $(5, 6, 2)$ is
- (2) (b) A is een 3×3 matrix met de eigenschap dat $A^2 = -2A$. Geef alle mogelijke waarden voor $\det A$.

- (2) (c) Gegeven zijn de matrices $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2z & 2x & 2y \end{bmatrix}$. Verder is gegeven dat $\det A = -2$. Wat is $\det B$?

- (2) **K2.** Welke van de volgende afbeeldingen zijn lineair en welke niet?

De spiegeling $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in het vlak $3x_1 - x_2 + x_3 = 2$

wel/niet

De afbeelding $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $T_2([x_1, x_2, x_3]^T) = [\pi x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3]^T$

wel/niet

De afbeelding $T_3 : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ met $T_3(A) = A^T A$

wel/niet

De afbeelding $T_4 : D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $T_4(f) = [f(0), f'(1)]^T$

wel/niet

- (2) **K3.** Maak de volgende definitie af: Een *kleinste kwadraten oplossing* van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (met A een $m \times n$ matrix en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) is een vector $\hat{\mathbf{x}}$ waarvoor geldt dat...

- (2) **K4.** V is de deelverzameling van $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ die bestaat uit de matrices waarvan de determinant 0 is, dus $V = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$. Ga van de volgende uitspraken over V na of ze juist of onjuist zijn:

V bevat de nulvector van $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

juist/onjuist

V is gesloten onder optelling.

juist/onjuist

V is gesloten onder scalaire vermenigvuldiging.

juist/onjuist

V is geen deelruimte van $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

juist/onjuist

- (2) **K5.** De lineaire afbeelding $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ is gedefinieerd door $T(p)(x) = (1 - x^2)p''(x) - 2xp'(x)$. Bepaal $\begin{bmatrix} T \\ C \leftarrow B \end{bmatrix}$ voor de bases $B = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$ en $C = (x^2, x, 1)$.

Naam:

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

(5)

1. (a) Welke van de volgende matrices zijn wel en welke zijn niet reëel diagonaliseerbaar? Leg uit!

[AANWIJZING: Dit kan met weinig rekenwerk!]

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (3) (b) Voor welke waarden van k bestaat er een eigenbasis voor $\mathbb{R}^3$ als $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ 2 & 1 & k \\ 2 & 1 & k \end{bmatrix}$.

- (3) (c) Diagonaliseer de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ en bepaal daarmee een matrix R zo dat $R^2 = A$. Je mag R schrijven als product van matrices.

Naam:

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

1. Gegeven zijn de volgende matrix en vectoren:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

(2)

(a) Laat zien dat $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ een basis is voor de nulruimte van A .

(3)

(b) Bepaal de projectie van $\mathbf{b}$ op de nulruimte van A .

Eventueel extra ruimte voor antwoord op (b)

(2)

(c) Bepaal de projectie van $\mathbf{b}$ op de rijruimte van A .

(AANWIJZING: Als je het resultaat van (b) gebruikt kan dit met zeer weinig rekenwerk. Als je (b) niet kon, kun je uitleggen hoe (c) moet)

Naam:

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

2. Gegeven wordt dat $B = (3x^3 - 2, x^2 + 2, x^3 + x^2 + x)$ een (geordende) basis is voor een deelruimte W van $P(\mathbb{R})$.

(2)

- (a) Bepaal de basis B' voor W als gegeven is dat ${}_{B \leftarrow B'} C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(2)

- (b) Bepaal ${}_{B \leftarrow B'} [T]$ als van de lineaire afbeelding $T : W \rightarrow W$ gegeven is dat ${}_{B \leftarrow B} [T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- (3) (c) Voor het polynoom p uit W geldt $[p]_{B'} = [1, -1, 1]^T$. Bepaal p en $T(p)$.

Naam:

Studienummer:

--	--	--	--	--	--	--

3. Laat P een $n \times n$ projectiematrix zijn met kolomruimte W ($n \geq 2$). Definieer de matrix A door $A = 2P - I$.

(2) (a) Toon aan: als $\mathbf{x} \in W$ dan $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

(2) (b) Toon aan: als $\mathbf{x} \perp W$ dan $A\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

(2) (c) Toon aan: A heeft geen andere eigenwaarden dan 1 en -1 .