

Tentamen Markov Processen
TW2570
April 9, 2019, 13:30-16:30

Bij dit examen is het gebruik van een zelfgemaakt formuleblad toegestaan van één A4. Normering: elk onderdeel van een vraag weegt even zwaar (5 punten). Er zijn 10 onderdelen, dus 50 punten.

Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands of Engels.

Nederlandse versie (de Engelse versie is op p. 3)

1. Gegeven is een vertakkingsproces $(X_n)_{n \geq 0}$ met $X_0 = 1$, waarvan het aantal nakomelingen per individu Z de volgende kansverdeling heeft:

$$P(Z = 0) = P(Z = 1) = \frac{1}{4}, \quad \text{en} \quad P(Z = 2) = \frac{1}{2}.$$

- a. Bereken de verwachtingswaarde $E[X_3]$ van X_3 , en de kans e dat dit vertakkingsproces uiteindelijk zal uitsterven.
- b. Bereken de conditionele kans op uiteindelijk uitsterven als *gegeven is* dat $X_{10} = 5$.
2. Beschouw een Poisson proces $(N_t)_{t \geq 0}$ met parameter $\lambda > 0$. Eén van de eigenschappen van het Poisson proces is, dat het onafhankelijk incrementen heeft. Verder zagen we in Stelling 11.6 van G&W dat voor $t > 0$ de discrete stochast N_t een exponentiele verdeling heeft met parameter λt .

- a. Toon aan dat voor $t > 0$ de matrix van overgangskansen $P_t = (p_{i,j}(t))$ gegeven wordt door:

$$P_t = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t} & \frac{\lambda^3 t^3}{3!} e^{-\lambda t} & \dots \\ 0 & e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t} & \dots \\ 0 & 0 & e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- b. De matrix $Q = (q_{i,j})$ van een continuïteit Markov keten was in hoofdstuk 5 van de reader gedefinieerd door $q_{i,j} = p'_{i,j}(0)$, voor alle $i, j \in S$.

Gebruik de uitdrukking voor P_t uit deel a. van deze opgave om Q te bepalen voor het Poisson proces $(N_t)_{t \geq 0}$ met parameter $\lambda > 0$.

3. Beschouw een discrete, irreducibele en aperiodieke Markovketen $(X_n)_{n \geq 0}$ op een eindige toestandsruimte S met n -staps overgangskansen $p_{i,j}(n)$ en stationaire verdeling $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$. Toon dan aan dat voor alle $i, j \in S$ er geldt dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i, X_{2n} = j) = \pi_i \pi_j.$$

Geef kort aan welke resultaten u gebruikt.

4. Een bedrijf beschikt over drie identieke machines. Deze bezitten een vitaal, kostbaar en kwetsbaar onderdeel dat volgens een of andere kansverdeling stukgaat. De kapotte onderdelen worden vervangen volgens het volgende systeem: aan het begin van elke week worden er zoveel besteld als er op dat moment stuk zijn. De levertijd is precies één week (dus op de maandag-ochtend de week erop kunnen de kapotte machines weer gebruikt worden).

Zij X_n het aantal werkende machines aan het begin van de n de week; en zij U_n het aantal machines dat uitvalt gedurende de n de week (doordat bovengenoemd vitaal onderdeel stuk gaat). Stel dat de machines uitvallen met de volgende kansverdeling:

$$P(U_n = j | X_n = i) = \frac{1}{i+1}, \quad j = 0, 1, \dots, i, \quad \text{voor } i = 0, 1, 2, 3.$$

Ga voor uzelf na¹ dat het vervangingssysteem bewerkstelligt dat:

$$X_{n+1} = 3 - U_n,$$

en dat $(X_n)_{n \geq 1}$ een Markovketen is.

- a. Geef de overgangsmatrix van de Markovketen $(X_n)_{n \geq 1}$.
 - b. Bereken de stationaire verdeling π van de Markovketen $(X_n)_{n \geq 1}$. Geef kort aan waarom π bestaat.
 - c. Wat is op de lange duur het gemiddelde aantal werkende machines?
5. Beschouw een werkplaats met twee machines, die tegelijkertijd en onafhankelijk van elkaar werken, en elk na een exponentieel verdeelde tijd met verwachting $1/\mu$ kapot gaan. Er is 24 per dag een monteur aanwezig, en reparatie-tijden zijn exponentieel verdeeld met parameter λ .
- a. Wat is op de lange duur de kans dat beide machines niet werken, als $\lambda = 1 = \mu$?
 - b. Wegens teleurstellende verkoopresultaten besluit de directie om maar één machine te laten werken, en er één achter de hand te houden (als back-up). Als de werkende machine dan kapot gaat kan deze direct vervangen worden door de nog werkende machine, en kan de monteur direct aan de slag met de kapotte machine. Natuurlijk kan de back-up ook kapot gaan terwijl de monteur nog niet klaar is met de reparatie van de kapotte machine; het kan dus gebeuren dat beide machines tegelijkertijd kapot zijn.

Wat heeft deze beslissing van de directie voor invloed op uw antwoord van deel a. van deze opgave? Dus: wat is op de lange duur de kans dat beide machines niet werken, als $\lambda = 1 = \mu$?

Einde

¹Dat hoeft u dus **niet** voor dit tentamen te doen, maar mag u als gegeven beschouwen.

Exam Markov Processen
TW2570
April 9, 2019, 13:30-16:30

With this exam you are allowed to use one page A4 cheat sheet. Every part of every question has the same weight. There are 10 parts, so there are 50 points in total.

Just an answer is *not* sufficient: you need to offer an explanation or calculation and/or motivation how you obtained your answer. Everything should be eligible in Dutch or English.

English version (you can find the Dutch version on p. 1)

1. Consider the branching process $(X_n)_{n \geq 0}$ with $X_0 = 1$, where the number of offspring of an individual Z is given by the following probability distribution:

$$P(Z = 0) = P(Z = 1) = \frac{1}{4}, \quad \text{en} \quad P(Z = 2) = \frac{1}{2}.$$

- a. Determine the expected value $E[X_3]$ of X_3 , and the probability e that this branching process eventually will become extinct.
- b. Determine the conditional probability of eventual extinction of this branching process if it is given that $X_{10} = 5$.
2. Consider a Poisson process $(N_t)_{t \geq 0}$ with parameter $\lambda > 0$. One of the properties of the Poisson process is, that it has independent increments. Furthermore, in Theorem 11.6 of G&W we saw that for $t > 0$ the discrete random variable N_t has an exponential distribution with parameter λt .

- a. Show that for $t > 0$ the transition matrix $P_t = (p_{i,j}(t))$ satisfies that:

$$P_t = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t} & \frac{\lambda^3 t^3}{3!} e^{-\lambda t} & \dots \\ 0 & e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t} & \dots \\ 0 & 0 & e^{-\lambda t} & \lambda t e^{-\lambda t} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- b. The matrix $Q = (q_{i,j})$ of a continuous time Markov chain was defined in chapter 5 of the reader as $q_{i,j} = p'_{i,j}(0)$, for all $i, j \in S$.

Use the expression of P_t from part a. of this exercise to determine Q for the Poisson process $(N_t)_{t \geq 0}$ with parameter $\lambda > 0$.

3. Consider a discrete, irreducible and aperiodic Markov chain $(X_n)_{n \geq 0}$ on a finite state space S with n -step transition probabilities $p_{i,j}(n)$ and stationary distribution $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$. Show that for all $i, j \in S$ we have that:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i, X_{2n} = j) = \pi_i \pi_j.$$

Briefly indicate which results you use.

4. Consider the situation where a company has 3 identical machines. Each of these machines contains a vital, precious and expensive part, which breaks down according to some probability distribution. Broken parts are replaced according to the following scheme: at the beginning of the week one orders as many of these parts as there are broken ones at that moment. Delivery time is exactly one week, so the next week on Monday-morning the broken machines can work again.

Let X_n be the number of operational machines at the beginning of week n , and let U_n be the number of machines breaking down in week n (because the above mentioned precious part breaks down). Suppose that machines become out-of-order according to the following probability distribution:

$$P(U_n = j | X_n = i) = \frac{1}{i+1}, \quad j = 0, 1, \dots, i, \quad \text{voor } i = 0, 1, 2, 3.$$

Check for yourself² that the above replacement scheme yields that:

$$X_{n+1} = 3 - U_n,$$

and that $(X_n)_{n \geq 1}$ is a Markov chain.

- a. Determine the matrix P of transition probabilities of the Markov chain $(X_n)_{n \geq 1}$.
 - b. Determine the stationary distribution π of the Markov chain $(X_n)_{n \geq 1}$. Briefly indicate why π exists.
 - c. In the long run, what is the average number of operating machines?
5. Consider two machines, operating simultaneously and independently, where both machines have an exponentially distributed time to failure with mean $1/\mu$. There is a single repair facility, and the repair times are exponentially distributed with rate λ .
- a. In the long run, what is the probability that no machines are operating when $\lambda = \mu = 1$?
 - b. We now assume that at most one machine can operate at any time. Namely, while one machine is working, the other one may be either under repair or already fixed and waiting to take over. How does this modify your answer to question **a.** of this exercise?

The End

²So this is **not** part of this exam!