Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, 2628 CD DELFT

TUDelft

tentamen Analyse (deel 2) – wi 1 005 In, dl. 2

18 juni 2008, 09.00–11.00 uur

Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.

*Het **formuleblad** van het instellingspakket en een **rekenmachine** mogen worden gebruikt.*
*Onderling contact, communicatieapparatuur, boeken en aantekeningen zijn **niet** toegestaan.*

Elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie te worden voorzien.
Tenzij anders gevraagd worden exacte antwoorden verlangd (dus geen *benaderingen).*

1. Bereken met de regel van De l'Hospital of met behulp van machtreeksen:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x \sin x}.$$ 10

2. Gegeven is de *rij* $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ met $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$.
   a) i) Is de rij monotoon (dus stijgend of dalend)? Bewijs je gelijk.
   ii) Is de rij alternerend? 8
   iii) Is de rij begrensd?
   b) Heeft de rij een limiet? Zo ja, welke? 8

3. Gegeven is de *reeks* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ met $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$.
   Is de reeks absoluut convergent, relatief (*conditionally*) convergent, of divergent? 10

4. Stel, je wilt de som weten van de convergente reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. 8
   Hoeveel termen neem je om de som tot op zes decimalen nauwkeurig te bepalen?

5. Gegeven is de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\arctan n)^n}$.
   a) Bepaal de convergentiestraal en het convergentie-interval van de reeks. 12
   Aanwijzing: gebruik het wortelkenmerk van Cauchy.
   b) Laat zien dat de *convergentiestraal* van de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^n}{(\arctan n)^n}$ hieruit eenvoudig volgt.
   Leg nauwkeurig uit welke stappen je neemt. N.B. randonderzoek wordt *niet* gevraagd. 6
   Aanwijzing: hoe ontstaat deze reeks uit de vorige?

6. Gegeven is de functie $f : D \to \mathbb{R}$ met $f(x,y,z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$.
   a) Bepaal en teken het (maximale) domein D van f. 4
   b) Hoe noemt men de verzameling punten (x,y,z) die voldoen aan een vergelijking van de vorm $f(x,y,z) = 5$? Beschrijf deze figuur ook in meetkundige termen. 2
   c) Bepaal f, f_x en f_{xy} in het punt $P = (2, 0, -1)$. 10

7. Bereken $\displaystyle\iint\limits_R xy\, \mathrm{e}^{x^2 y}\, \mathrm{d}A$ voor $R = [0,1] \times [0,2]$. 12

Normering

Elk onderdeel levert maximaal het aantal in de kantlijn vermelde punten op.
Als t het aantal toegekende punten is is het cijfer $c = \frac{t}{10}$ $(c \in \mathbb{N})$. 10

1. **De l'Hospital** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x \sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2 \sin 2x + 3 \sin 3x}{1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4 \cos 2x + 9 \cos 3x}{\cos x + 1 \cdot \cos x - x \cdot \sin x} = \dfrac{-4+9}{1+1-0} = \frac{5}{2}$; of 10

machtreeksen $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x \sin x} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + O((2x)^4)\right) - \left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + O((3x)^4)\right)}{x \cdot (x + O(x^3))} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2 + \frac{9}{2}x^2 + O(x^4)}{x^2 + O(x^4)} = \frac{5}{2}\,.$$

2. a) i) Hierbij vier verschillende werkwijzen die aantonen dat het algemene element a_n stijgt:

herschrijven $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}}$; de noemer van de breuk stijgt, de breuk daalt en het geheel, a_n , stijgt; of

differentiëren $a_n = f(n)$ met $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; $f'(x) = \frac{(1+\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} =$ $\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})^2} > 0$ houdt in dat f , en daarmee ook a_n , stijgt; of

aftrekken $a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = \frac{(1+\sqrt{n})\sqrt{n+1} - (1+\sqrt{n+1})\sqrt{n}}{(1+\sqrt{n})\,(1+\sqrt{n+1})} =$ $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(1+\sqrt{n})\,(1+\sqrt{n+1})} > 0$, want de teller is positief ($\sqrt{n}$ stijgt) en de noemer ook; we besluiten dat $a_{n+1} > a_n$ en de rij stijgt; of

delen $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{n+1}}}{\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}} = \frac{1+\sqrt{n}}{1+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}\sqrt{n+1}} > 1$, want $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$; verder zijn teller en noemer positief; we besluiten dat $a_{n+1} > a_n$ en de rij stijgt. 8

ii) Teller en noemer zijn beide steeds positief, en elk element van de rij dus ook. De elementen van de rij wisselen niet van teken en de rij is dus niet alternerend.

iii) Alle elementen van de rij zijn positief; de rij is dus naar beneden begrensd (door 0). De rij is ook naar boven begrensd, want $a_n < 1$ voor alle n (de teller is kleiner dan de noemer, of bekijk de eerste aanpak in onderdeel i)); 1 treedt als bovengrens op.

We besluiten dat de rij begrensd is.

b) Uit het vorige onderdeel blijkt dat de rij stijgend en naar boven begrensd is; de monotone-convergentiestelling garandeert het bestaan van een limiet.

[of:] De volgende berekeningen leveren een limiet, en die bestaat dus. We geven drie werkwijzen:

herschrijven $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}}\right) = 1 - 0 = 1$; of

delen door hoofdzaak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$; of

De l'Hospital $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hos}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = 1\,.$ 8

De rij $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ is dus *convergent*.

Let op: aantonen dat $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ of dat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ helpt niet — beide methoden geven zelfs geen uitsluitsel over het bestaan van een limiet van de rij.

Dit onderdeel is Stewart, 5$^{\text{th}}$ ed., § 11.1, 18).

3. De reeks is *divergent*, want de algemene term a_n gaat niet naar 0 (maar naar 1 — *zie* boven). 10

[of:] *Let op*: het verhoudings- en het wortelkenmerk (van d'Alembert en Cauchy) geven geen uitsluitsel: de te berekenen limiet komt in beide gevallen op 1 uit; het integraalkenmerk is niet van toepassing omdat de (modulus van de) algemene term niet dalend is.

$\boxed{\longrightarrow}$

4. De reeks in kwestie is alternerend; daarmee is bekend dat de afwijking die het gevolg is van het nemen van een partiële som in plaats van de gehele som in absolute zin niet groter is dan de modulus van de volgende term. In formule: $|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k| \leq |a_{n+1}|$ met $a_k = \frac{(-1)^k}{k^2}$.

We moeten dus een n vinden waarvoor $|a_{n+1}|$ klein genoeg is. Voor een nauwkeurigheid van zes decimalen mag de afwijking niet groter zijn dan $5 \cdot 10^{-7}$. We lossen daarom op:

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2} < 5 \cdot 10^{-7} \iff (n+1)^2 > 2 \cdot 10^6 \overset{n+1>0}{\iff} n+1 > \sqrt{2 \cdot 10^6} = 1000\sqrt{2}.$$ 8

We bereiken de gewenste precisie door $1000\sqrt{2} - 1$, naar boven afgerond 1414, termen te nemen.

Opmerking: het is heel wel mogelijk dat de gewenste naukeurigheid al eerder is bereikt. Naar uit berekeningen blijkt benaderen de eerste 1000 termen de som $-\frac{\pi^2}{12}$ al nauwkeurig genoeg.

Dat laat zich als volgt verklaren: voor niet te kleine waarden van n verandert $|a_n|$ nauwelijks, en schommelt de waarde van de partiële som om de uiteindelijke waarde, waarbij de partiële sommen afwisselend nagenoeg $\frac{1}{2}|a_n|$ boven en onder de som uitkomen. Zodra $|a_{n+1}|$ kleiner is dan 10^{-6} is het doel derhalve al bereikt, en dat is na 1000 stappen het geval.

Vergelijk dit onderdeel met Stewart, 5th ed., § 11.5, 23).

5. a) We passen het kenmerk van Cauchy toe (dat van d' Alembert is lastiger):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{(\arctan n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\arctan n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \arctan n} \cdot |x| = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \cdot |x| = 1$$

precies als $x = \pm\frac{\pi}{2}$. De convergentiestraal is dus $\frac{\pi}{2}$. 12

Randonderzoek: als $x = \pm\frac{\pi}{2}$ ontstaat een reeks waarvan de algemene term niet naar 0 gaat: de absolute waarde $\frac{(\frac{\pi}{2})^n}{(\arctan n)^n}$ gaat immers naar 1. De reeks is daar dus *divergent.*

We stellen vast dat de convergentiestraal $R = \frac{\pi}{2}$; het convergentie-interval $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Dit onderdeel is een variant op Stewart, 5th ed., § 11.8, 27) [ln vervangen door arctan].

b) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^n}{(\arctan n)^n}$ is verwant aan de vorige reeks: de extra factor n ontstaat door (termsgewijze) differentiatie van deze vorige reeks, er is een extra factor x toegevoegd en de sommatie-index moet worden aangepast. We laten het verband in formulevorm zien.

Neem weer $a_n(x) = \frac{x^n}{(\arctan n)^n}$ en betitel de somfunctie van de reeks (voor $x \in I$) als s, dus $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$. Voor het volgende merken we op dat $a_1(x) = \frac{x}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}x$. 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\arctan n)^n} = s(x) \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{(\arctan n)^n} = s'(x) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{(\arctan n)^n} = \frac{4}{\pi} + s'(x) \Longrightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^n}{(\arctan n)^n} = x\left(\frac{4}{\pi} + s'(x)\right).$$

Geen van deze omzettingen heeft invloed op de convergentiestraal (in beginsel wel op het convergentie-interval, al blijkt dat hier niet), en die bedraagt dan ook nog steeds $\frac{\pi}{2}$.

6. a) De enige beperking die aan x, y en z gesteld moet worden is dat de uitdrukking onder het wortelteken niet-negatief dient te zijn omdat anders de wortel niet gedefinieerd is; daartoe moet $9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$. Een ruwe schets van het domein $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$, de bol om de oorsprong met straal 3, volstaat. 4

Dit onderdeel is Stewart, 5th ed., § 14.1, 19) [9 in plaats van 1].

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 5\}$ is een niveau-oppervlak van de functie f (op niveau 5). De maximale waarde van f bedraagt echter 3 (in de oorsprong), en de gevraagde verzameling is dus leeg (zij bevat geen punten).[1] 2

$\longrightarrow$

[1]bedoeld was het niveau-oppervlak bij $f(x,y,z) = \sqrt{5}$, in de vorm van een bolschil met straal 2

c)
- $f(P) = f(2,0,-1) = \sqrt{9-2^2-0^2-(-1)^2} = \sqrt{4} = 2\,;$
- $f_x(P) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,0,-1) = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}\Big|_{(2,\,0,\,-1)} = \dfrac{-2}{2} = -1\,;$ 10
- $f_{xy}(P) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,0,-1) = \dfrac{-xy}{(9-x^2-y^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{(2,\,0,\,-1)} = \dfrac{-2\cdot 0}{8} = 0\,.$

7. $$\iint_R xy\,\mathrm{e}^{x^2y}\;\mathrm{d}A = \int_0^2\int_0^1 xy\,\mathrm{e}^{x^2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{u=x^2}{=} \int_0^2\int_0^1 \tfrac{1}{2}\,y\,\mathrm{e}^{uy}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \tfrac{1}{2}\,y\cdot\left[\frac{\mathrm{e}^{uy}}{y}\right]_0^1 \mathrm{d}y =$$
$$\int_0^2 \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^y-1)\,\mathrm{d}y = \left[\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^y-y)\right]_0^2 = \tfrac{1}{2}\,\big(\mathrm{e}^2-2-1+0\big) = \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{e}^2-3)\,.$$ 12

[of:] De integratievolgorde omwisselen (eerst over y, en dan over x integreren) vereist eerst een partiële integratie, is daardoor moeilijker, en loopt uiteindelijk vast. Kortweg:

$$\iint_R xy\,\mathrm{e}^{x^2y}\;\mathrm{d}A = \int_0^1\int_0^2 xy\,\mathrm{e}^{x^2y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{\text{P.I.}}{=} \int_0^1 x\left[y\cdot\frac{\mathrm{e}^{x^2y}}{x^2} - \int 1\cdot\frac{\mathrm{e}^{x^2y}}{x^2}\,\mathrm{d}y\right]_0^2 \mathrm{d}x =$$
$$\int_0^1 x\left(2\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x^2}}{x^2} - 0\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{\mathrm{e}^{2x^2}}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2\,\frac{\mathrm{e}^{2x^2}}{x} - \frac{\mathrm{e}^{2x^2}}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \cdots$$

Dit vraagstuk is Stewart, 5$^{\text{th}}$ ed., § 15.2, 19)