Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, 2628 CD DELFT

tentamen Analyse (deel 1) – wi 1 005 In, dl. 1
14 januari 2008, 09.00–11.00 uur

Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.

*Het **formuleblad** van het instellingspakket en een **rekenmachine** mogen worden gebruikt.*
*Onderling contact, communicatieapparatuur, boeken en aantekeningen zijn **niet** toegestaan.*

Elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie te worden voorzien.
Tenzij anders gevraagd worden exacte antwoorden verlangd (dus geen *benaderingen).*

1. a) Schrijf $\cos(-\arcsin x)$ zonder goniometrische functies. 8

   b) Differentieer $\cos(-\arcsin x)$ naar x. 8

2. Gebruik impliciete differentiatie om een vergelijking te vinden van de raaklijn in het punt $P = (1, 1)$ aan de kromme gegeven door $x^2 + xy + y^2 = 3$. 12

3. Bereken $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx$. 10

4. Bereken $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,e^x\,dx$. 10

5. Onderzoek of de volgende integraal convergent of divergent is; bepaal, indien mogelijk, de exacte waarde:

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x\ dx}{\sqrt{x^4 - 1}}\,.$$ 10

6. Los op: $y' = \dfrac{y}{\cos^2 x}$ als $y(\pi) = 2$. 10

7. Gegeven zijn $z = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}i$ en $w = 1 - 2i$. 10

   Bereken z^{12} en $\frac{z}{w}$; schrijf de oplossingen in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

8. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

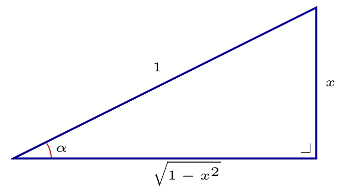
$$y'' - 4y' + 4y = 100\,e^{-2x}\cos(2x)\,.$$ 12

<u>Normering</u>

Elk onderdeel levert maximaal het aantal in de kantlijn vermelde punten op.
Als t het aantal toegekende punten is is het cijfer $c = \frac{t}{10}$ $(c \in \mathbb{N})$. 10

1. a) Eerst stellen we vast dat $\cos(-\arcsin x) = \cos(\arcsin x)$ (cos is een even functie).

Noemen we $\arcsin x = \alpha$, dan kunnen we α in een rechthoekige driehoek weergeven, en wel aldus (*zie* figuur): laat α een der scherpe hoeken zijn, geef de hypothenusa als lengte 1, dan is de overstaande zijde x lang (immers, $\sin\alpha = x$).



De andere rechthoekszijde heeft lengte $\sqrt{1-x^2}$ (stelling van Pythagoras), en we lezen in de figuur af:

$$\cos(\arcsin x) = \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}\,.$$ 8

[of:] Omdat $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ geldt dat $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2$.
Verder is $\alpha = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dus $\cos\alpha \geq 0$. We besluiten: $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$.

[of:] Het antwoord van onderdeel b) primitiveren levert: $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1-x^2} + C$.
De juiste waarde van de integratieconstante $C = 0$, want $\cos(-\arcsin 0) = 1$.

b) Gebruikmakend van het vorige onderdeel is de gevraagde afgeleide

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot -2x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$ 8

[of:] Rechtstreeks differentiëren (kettingregel!) gaat als volgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(\cos(-\arcsin x)) = -\sin(-\arcsin x)\cdot -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\sin \text{ oneven}}{=}$$
$$\sin(\arcsin x)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

2. Beschouw y als functie van x en differentieer beide zijden van de vergelijking $x^2 + x\,y(x) + (y(x))^2 = 3$ impliciet naar x (gebruik ketting- èn productregel):

$$2x + y(x) + x\,y'(x) + 2\,y(x)\,y'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x + y = (-x-2y)\,y' \overset{x+2y\neq 0}{\Longleftrightarrow} y' = \tfrac{2x+y}{-x-2y}\,.$$

Hierin vullen we $x = 1$ en $y = 1$ in en we vinden zo: $y'(1) = -1$.

[of:] Meteen na differentiatie $x = 1$ en $y = 1$ invullen levert ineens

$$3 + 3y' = 0 \Longleftrightarrow y' = -1\,.$$ 12

De gevraagde raaklijn is de rechte door het punt P met als richtingscoëfficiënt -1, dus: $y - 1 = -1\,(x-1) \Longleftrightarrow x + y = 2$.

3. Substitueer $u = \ln x$ als nieuwe variabele; we moeten verder invullen:
$\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $u(1) = \ln 1 = 0$ en $u(\mathrm{e}^2) = \ln(\mathrm{e}^2) = 2$; hiermee wordt de integraal:

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 u\,\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}u^2\right]_0^2 = 2\,.$$

[of:] Door middel van partieel integreren vinden we de oorspronkelijke integraal terug: 10

$$\int_1^{\mathrm{e}^2} \underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{v'}\,\mathrm{d}x = \Big[\underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}\Big]_1^{\mathrm{e}^2} - \int_1^{\mathrm{e}^2} \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow$$
$$\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\left(\ln x\right)^2\right]_1^{\mathrm{e}^2} = \frac{1}{2}\left(2^2 - 0^2\right) = 2\,.$$

$\longrightarrow$

4. We berekenen eerst met behulp van partiële integratie een primitieve:

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v} \, \mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = (x-1)\,\mathrm{e}^x \,.$$ 10

Invullen van de grenzen levert: $\int\limits_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \left[(x-1)\,\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} = 0\,e^1 - -2\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}\,.$

5. De integrand is onbegrensd in $x = 1$: de integraal is oneigenlijk van de tweede soort.

De integraal is convergent als $\lim\limits_{t \to 1^+} \int\limits_{t}^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^4-1}} \, \mathrm{d}x$ bestaat; als de limiet niet bestaat is de integraal divergent. Met de substitutie $x^2 = u$ en formule(blad) 16 krijgen we: 10

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4-1}} = \int \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}} = \tfrac{1}{2}\,\ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| = \tfrac{1}{2}\,\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4-1}\right|, \quad \text{dus}$$

$$\lim_{t \to 1^+} \int\limits_{t}^{\sqrt{2}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4-1}} = \lim_{t \to 1^+} \left(\tfrac{1}{2}\,\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \tfrac{1}{2}\,\ln\left(t^2 + \sqrt{t^4-1}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\,\ln(2+\sqrt{3})\,.$$

De limiet bestaat dus: de integraal is convergent en de exacte waarde is $\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$.

6. De gegeven differentiaalvergelijking is *separabel*:

$$y' = \frac{y}{\cos^2 x} \overset{y \neq 0}{\iff} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \overset{\text{primitiveren}}{\iff} \ln|y| = \tan x + C_0 \quad (C_0 \in \mathbb{R}) \iff$$

$$y = C\,\mathrm{e}^{\tan x} \quad (C \in \mathbb{R})\,, \text{ dus } y(\pi) = 2 \iff C\,\mathrm{e}^0 = 2 \iff C = 2\,.$$

De gevraagde oplossing is daarmee $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{\tan x}$. 10

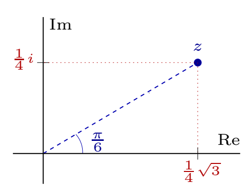
[of:] De gegeven differentiaalvergelijking is *lineair*: $y' = \frac{y}{\cos^2 x} \iff y' - \frac{1}{\cos^2 x}\,y = 0\,.$

We bepalen als integrerende factor $I(x) = \exp\left(\int -\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{-\tan x}$.

Daar het rechterlid 0 bedraagt is de algemene oplossing

$$\mathrm{e}^{\tan x} \cdot \int \mathrm{e}^{-\tan x} \cdot 0 \, \mathrm{d}x = C\,\mathrm{e}^{\tan x}\,.$$

7. Uit (*bijgevoegde*) schets van $z = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}i$ leest men onmiddellijk af: 10



$|z| = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \frac{1}{2}$ en $\arg z = \frac{\pi}{6}$.

Dan is $\left|z^{12}\right| = \frac{1}{2^{12}}$ en $\arg(z^{12}) = 2\pi \equiv 0 \pmod{2\pi}$, zodat $z^{12} = \frac{1}{4096}$.

De andere gevraagde berekening voeren we in rechthoekige schrijfwijze uit:

$$\frac{z}{w} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}i\right)(1+2i) = \tfrac{1}{20}\sqrt{3} - \tfrac{1}{10} + i\left(\tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{10}\sqrt{3}\right).$$

$\longrightarrow$

8. Dit is een tweede-orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

De karakteristieke vergelijking $r^2 - 4r + 4 = 0$ heeft $r = 2$ als dubbele wortel.

De oplossing van de gereduceerde (homogene) vergelijking is $y_\mathrm{c} = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,x\mathrm{e}^{2x}$.

Probeer $y_\mathrm{p} = \mathrm{e}^{-2x}\,(A\cos(2x) + B\sin(2x))$ (*geen* modificatie nodig). Invullen geeft

$$y_\mathrm{p}'' - 4y_\mathrm{p}' + 4y_\mathrm{p} = 12\,\mathrm{e}^{-2x}\,(A\cos(2x) + B\sin(2x)) + 16\,\mathrm{e}^{-2x}\,(A\sin(2x) - B\cos(2x))\,. \qquad 12$$

Dit moet zijn $100\,\mathrm{e}^{-2x}\cos(2x)$, dus $\left\{\begin{array}{rcr} 12A - 16B & = & 100 \\ 16A + 12B & = & 0 \end{array}\right.$.

Dan volgt $A = 3$, $B = -4$, en $y_\mathrm{p} = \mathrm{e}^{-2x}\,(3\cos(2x) - 4\sin(2x))$.

De oplossing wordt dan $y = c_1\,\mathrm{e}^{2x} + c_2\,x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}\,(3\cos(2x) - 4\sin(2x))$,
met willekeurige constanten c_1 en c_2 .