Mekelweg 4, 2628 CD DELFT

tentamen Analyse (deel 1 + 2) – wi 1 005 In, dl. 1 + 2

hele stof

24 januari 2007, 09.00–12.00 uur

Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.

*Het **formuleblad** van het instellingspakket en een **rekenmachine** mogen worden gebruikt.*
*Onderling contact, communicatieapparatuur, boeken en aantekeningen zijn **niet** toegestaan.*

Elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie te worden voorzien.
Tenzij anders gevraagd worden exacte antwoorden verlangd. 8

1. Bepaal $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ uit de *impliciete* betrekking $x^2y + xy^2 = 3x$. 6

2. Bereken $\displaystyle\int e^{\cos x} \sin x \,\mathrm{d}x$. 6

3. Bereken $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x$. 8

4. Bepaal de oplossing van het volgende beginvoorwaardeprobleem: 8

   $y' \tan x = a + y$, $\quad y(\frac{\pi}{6}) = a \quad$ en $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

   Aanwijzing: als je het nodig hebt: $\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$ en $\int \cot x \,\mathrm{d}x = \ln|\sin x|$.

5. Laat $z = 1 - i\sqrt{3}$ en $w = 2 + 2i$. Bereken $z^6\,(\overline{w})^2$. 6

6. Bereken met de regel van De l'Hospital of met behulp van machtreeksen:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\,\sin(x)} \,.$$ 6

7. Bepaal convergentiestraal en convergentie-interval van de machtreeks

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\,(x+3)^n \,.$$ 8

8. Laat de functie $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = x \tan x$.

   Bepaal de eerste *drie* termen van de Taylorreeks van f rond het *punt* $a = \frac{\pi}{4}$. 8

   Aanwijzing: gebruik zo je wilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = 1 + \tan^2(x)$.

9. Op een zeker domein $D \subset \mathbb{R}^2$ is een functie $F : D \to \mathbb{R}$ gegeven door

   $$F(x,y) = \frac{x^2 \ln y}{\sqrt{1-x^2}} \,.$$

   a) Teken het grootst mogelijke *domein* D . 2

   b) Bereken $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ in D . 6

10. Bereken $\displaystyle\iint_R \frac{y^3}{x}\,\mathrm{d}A$ als $R = [1, e] \times [0, 2]$. 8

<u>Normering</u>

Elk onderdeel levert maximaal het aantal in de kantlijn vermelde punten op.
Als t het aantal toegekende punten is, en q het resultaat van de quizzen voor deel 2 ($8 \le t \le 80$ en $0 \le q \le 10$), is het cijfer $c = \max\{\frac{t}{8}, \frac{t+2q}{10}\}$ ($c \in \mathbb{N}$, $1 \le c \le 10$).

1. Beschouw y als functie van x en differentieer beide zijden impliciet naar x; er komt: § 3.6

$$2xy+x^2y'+y^2+2xyy' = 3 \iff (x^2+2xy)y' = 3-2xy-y^2 \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3-2xy-y^2}{x^2+2xy},$$

vooropgesteld dat de noemer niet 0 wordt. 6

DIT IS STEWART, 5^TH ED., § 3.6, 9) [ANDERE FORMULERING]

2. Laat $u = \cos x \Longrightarrow \mathrm{d}u = -\sin x \,\mathrm{d}x$. § 5.5

$$\int \mathrm{e}^{\cos x} \sin x \,\mathrm{d}x = \int -\mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u = -\mathrm{e}^u = -\mathrm{e}^{\cos x}.$$ 6

DIT IS STEWART, 5^TH ED., § 5.5, 28) [x IN PLAATS VAN t]

3. Door partiële integratie werken we de $\ln x$ in de integrand weg: § 7.1 / 7.8

$$\int_1^\infty \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{x^3}}_{v'} \,\mathrm{d}x = \Bigg[\underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{\tfrac{-1}{2x^2}}_{v}\Bigg]_1^\infty - \int_1^\infty \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\tfrac{-1}{2x^2}}_{v} \,\mathrm{d}x =$$ 8

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{-\ln 1}{2\cdot 1^2} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4x^2} - -\frac{1}{4\cdot 1^2} \overset{(5)}{=} 0+0+0+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

DIT IS STEWART, 5^TH ED., § 7.8, 24)

4. De gegeven differentiaalvergelijking is zowel separabel als lineair. § 9.3 / 9.6

We lossen eerst de differentiaalvergelijking op, en wel op drie verschillende wijzen.

scheiding van variabelen

$y' \tan x = a + y \overset{0<x<\frac{\pi}{2},\, y\neq -a}{\iff} \frac{y'}{a+y} = \frac{1}{\tan x} \iff \int \frac{\mathrm{d}y}{a+y} = \int \cot x \,\mathrm{d}x \iff$
$\ln|a+y| = \ln|\sin x| + K$ (constante $K \in \mathbb{R}$) $\iff$
$a + y = C\sin x \iff y = -a + C\sin x$ (constante $C \in \mathbb{R}$).

Opmerking: de voorwaarden aan x en y zorgen ervoor dat tijdens de afleiding geen niet-bestaande uitdrukkingen worden gebruikt; er geldt dat $C = \pm\mathrm{e}^K$ kan worden gekozen; verder leidt $C = 0$ (het geval $y = -a$) ook tot een oplossing.

integrerende factor

$y' \tan x = a + y \overset{0<x<\frac{\pi}{2}}{\iff} y' - \frac{1}{\tan x} y = \frac{a}{\tan x}$ bezit als integrerende factor

$I(x) = \exp\left(\int -\cot x \,\mathrm{d}x\right) = \exp\left(-\ln|\sin x|\right) = \frac{1}{|\sin x|} \overset{0<x<\frac{\pi}{2}}{=} \frac{1}{\sin x}$, zodat

$y(x) = \frac{1}{I(x)} \int I(x) \frac{a}{\tan x} \,\mathrm{d}x = \sin x \cdot \int a \frac{\cos x}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = \sin x \cdot \int a \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^2 x}$
$\quad = \sin x \cdot (a \cdot -\frac{1}{\sin x} + C) = -a + C\sin x$ (constante $C \in \mathbb{R}$). 8

variatie van de constante (niet behandeld)

De gereduceerde vergelijking is $y' \tan x - y = 0$ en is separabel:
$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\tan x} \iff \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \cot x \,\mathrm{d}x \iff \ln|y| = \ln|\sin x| + K \iff y = C\sin x$ (constanten K en $C \in \mathbb{R}$ met $C = \pm\mathrm{e}^K$ of 0).

Behandel C als functie van x; zoek een particuliere oplossing van de vorm

$$y_\mathrm{p}(x) = C(x)\sin x \Longrightarrow y_\mathrm{p}'(x) = C'(x)\sin x + C(x)\cos x.$$

Invullen in de niet-gereduceerde differentiaalvergelijking levert:
$(C'(x)\sin x + C(x)\cos x)\tan x = a + C(x)\sin x \iff C'(x)\frac{\sin^2 x}{\cos x} = a \iff C(x) = \int a \frac{\cos x}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = \frac{-a}{\sin x}$; de integratieconstante is gelijk aan 0 gekozen.

De algemene oplossing is dus $y(x) = y_\mathrm{p}(x) + y_\mathrm{r}(x) = -a + C\sin x$.

z.o.z.

Ten slotte bepalen we de integratieconstante uit de beginvoorwaarde.

We willen dat $a = y(\frac{\pi}{6}) = -a + C\sin\frac{\pi}{6} = -a + \frac{1}{2}C$, dus $C = 4a$ en de oplossing van het beginvoorwaardeprobleem wordt $y(x) = -a + 4a\sin x$.

DIT IS STEWART, 5$^{\text{TH}}$ ED., § 9.3, 17) [$\frac{\pi}{3}$ VERVANGEN DOOR $\frac{\pi}{6}$]

5. Hieronder volgen drie verschillende methoden — de eerste twee zijn in wezen dezelfde. App. G

in modulus-argumentvorm

$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ en $\arg z = -\frac{\pi}{3}$ (of $\frac{5\pi}{3}$), want $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ en $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$, of $\tan(-\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$ èn $-\frac{\pi}{3}$ in het vierde kwadrant;
$|w| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ en $\arg w = \frac{\pi}{4}$, want $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\operatorname{Re} w}{|w|}$ en $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\operatorname{Im} w}{|w|}$, of $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1 = \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Re} w}$ èn $\frac{\pi}{4}$ in het eerste kwadrant (of uit schets);
$|\overline{w}| = |w| = \sqrt{8}$ en $\arg \overline{w} = -\arg w = -\frac{\pi}{4}$.

$$z^6\,(\overline{w})^2 = \left(2\,(\cos(-\tfrac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(-\tfrac{\pi}{3}))\right)^6\,\left(\sqrt{8}\,(\cos(\tfrac{\pi}{4}) - \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{4}))\right)^2 =$$
$$2^6\,(\cos(-2\pi) + \mathrm{i}\sin(-2\pi))\,8\,(\cos(\tfrac{\pi}{2}) - \mathrm{i}\sin(\tfrac{\pi}{2})) = 64\cdot 1\cdot 8\cdot -\mathrm{i} = -512\,\mathrm{i}\,.$$

in exponentiële vorm (gebruikmakend van voorwerk) 6

$z = 2\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ en $w = \sqrt{8}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} \Longrightarrow \overline{w} = \sqrt{8}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$;

$$z^6\,(\overline{w})^2 = \left(2\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^6\cdot\left(\sqrt{8}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^2 = 2^6\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}}\,8\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = 64\cdot 8\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}\pi\mathrm{i}} = -512\,\mathrm{i}\,.$$

in rechthoekige vorm (met merkwaardige producten)

$$z^3 = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot(-\mathrm{i}\sqrt{3}) + 3\cdot 1\cdot(-\mathrm{i}\sqrt{3})^2 + (-\mathrm{i}\sqrt{3})^3 =$$
$$1 - 3\,\mathrm{i}\sqrt{3} - 9 + 3\,\mathrm{i}\sqrt{3} = -8 \Longrightarrow z^6 = 64\,;$$

$$\overline{w} = 2 - 2\,\mathrm{i} \Longrightarrow (\overline{w})^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot(-2\,\mathrm{i}) + (-2\,\mathrm{i})^2 = 4 - 8\,\mathrm{i} - 4 = -8\,\mathrm{i}\,;$$

$$z^6\,(\overline{w})^2 = 64\cdot -8\,\mathrm{i} = -512\,\mathrm{i}\,.$$

6. We geven voor beide methoden een uitwerking. § 4.4 / 11.10

SOM STEWART, 5$^{\text{TH}}$ ED., § 4.4, 27) (VAN DE LIJST) HEEFT DEZELFDE TELLER

regel van De l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\,\sin x}\;\left[\tfrac{0}{0}\right]\;\overset{\text{l'Hos}}{=}\;\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x + x\,\cos x}\;\left[\tfrac{0}{0}\right]\;\overset{\text{l'Hos}}{=}\;\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x + \cos x - x\,\sin x} = \frac{1}{2}\,.$$

6

machtreeksen

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\,\sin x}\;\overset{(6),(7)}{=}\;\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4))}{x\,(x+O(x^3))} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+O(x^4)}{x^2+O(x^4)} = \frac{1}{2}\,.$$

$\boxed{\longrightarrow}$

7. De convergentiestraal kan zowel met het verhoudingskenmerk van d'Alembert als met het wortelkenmerk van Cauchy worden bepaald; we tonen ze beide. § 11.8

d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\,(x+3)^{n+1}}{\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\,(x+3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} 2\,\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\,|x+3| = 2\,|x+3| = 1 \text{ als } |x+3| = \tfrac{1}{2}\,.$$

De convergentiestraal (rond -3) blijkt dus $\frac{1}{2}$.

Cauchy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\,(x+3)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}\,|x+3| = 2\sqrt{\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}}\,|x+3| \overset{(*)}{=} 2\,|x+3|\,.$$[1]

Voor het vervolg zie boven.

8

[of:] Wie ziet dat de reeks in $-\frac{5}{2}$ (*zie onder*) relatief convergent is, heeft een randpunt van het convergentie-interval ontdekt, en kan daaruit de convergentiestraal afleiden.

We onderzoeken nu de randpunten ($-\frac{7}{2}$ en $-\frac{5}{2}$):

$-\mathbf{\frac{7}{2}}$: invullen levert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}(-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; deze reeks is divergent ($p = \frac{1}{2} < 1$); en

$-\mathbf{\frac{5}{2}}$: invullen levert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$; deze reeks is relatief convergent: absolute convergentie geldt niet op grond van bovenstaande, maar de reeks is wel convergent; gebruik het kenmerk van Leibniz:

- $0 < \frac{1}{\sqrt{n}}$; derhalve is de reeks alternerend;
- $\frac{1}{\sqrt{n}}$ is dalend; en
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Het convergentie-interval is dus $(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}]$.

DIT IS STEWART, 5TH ED., § 11.8, 18)

8. De Taylorreeks van f rond $a = \frac{\pi}{4}$ luidt: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!}(x-\frac{\pi}{4})^n$. § 11.10

We hebben de termen nodig tot en met $n = 2$ en differentiëren f daartoe twee maal:

$$f(x) = x\tan x \Longrightarrow f'(x) = 1\cdot\tan x + x\cdot(1+\tan^2 x) \Longrightarrow$$
$$f''(x) = (1+\tan^2 x) + 1\cdot(1+\tan^2 x) + x\cdot 2\tan x\cdot(1+\tan^2 x)\,.$$

8

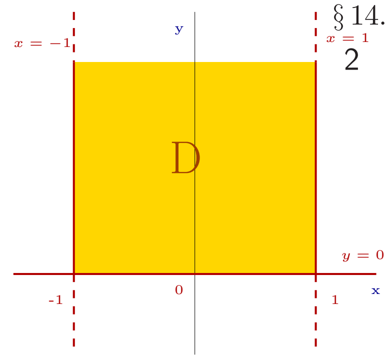
We vullen $\frac{\pi}{4}$ in en vinden $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}\cdot 1$, $f'(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{\pi}{4}\cdot 2$ en $f''(\frac{\pi}{4}) = 2 + 2 + \frac{\pi}{4}\cdot 2\cdot 2$.

Het gevraagde begin van de Taylorontwikkeling is daarmee

$$\tfrac{\pi}{4} + (1+\tfrac{\pi}{2})\,(x-\tfrac{\pi}{4}) + (2+\tfrac{\pi}{2})\,(x-\tfrac{\pi}{4})^2\,.$$

[1] de bij (*) gebruikte limiet wordt niet meer behandeld

9. a) Het domein (*zie figuur*) wordt beperkt door drie eisen: § 14.1



2

- onder het wortelteken moet een niet-negatieve uitdrukking staan; dus: $x^2 \le 1$
- de noemer mag niet 0 worden; dus: $x^2 \ne 1$; en
- achter de $\ln$ moet een positieve uitdrukking staan; dus: $y > 0$.

We vinden zo: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\,, y > 0\}$.

b) $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\sqrt{1-x^2}\cdot 2x\ln y - x^2 \ln y \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{2x\,(1-x^2)\,\ln y + x^3 \ln y}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$ § 14.3

[of:] Dit kan ook met de productregel. 6

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{y}\,.$$

10. $$\iint\limits_R \frac{y^3}{x}\,\mathrm{d}A = \int_1^{\mathrm{e}}\int_0^2 \frac{y^3}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\cdot\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\cdot 4\,\mathrm{d}x = 4\cdot\Big[\ln|x|\Big]_1^{\mathrm{e}} = 4\,.$$ § 15.2

8

[of:] *Opmerking*: de andere integratievolgorde gaat net zo; de integraal kan zelfs worden opgevat als product van twee integralen, daar de integrand het product is van een functie van x en een functie van y, en voorts de grenzen vast zijn.