

1 a) ... DE [JACOBIAN] $(f; a)$ HOEK- EN ORIËNTATIEBEWAAREND IS IN ELK PUNT $a \in D$
[DEFINITIE I.5.13]

b) ... ER EEN PUNT $z_0 \in D$ IS ZO DAT VOOR ELKE $z \in D$ HET LYNSTUK $[z_0, z]$ GEHEEL BINNEN D LIGT.

[DEFINITIE II.2.6]

c) ... EEN SINGULARITEIT a WAARVOOR EEN ANALYTISCHE FUNCTIE $\tilde{f}: D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ BESTAAT ZO DAT $f(z) = \tilde{f}(z)$ VOOR $z \in D$.

[DEFINITIE III.4.1]

d) ... DE COËFFICIENT a_{-1} VAN $(z-a)^{-1}$ IN DE LAURENTREEKS VAN f ROND a (OP $U_a^1(a)$ VOOR EEN $\epsilon > 0$).

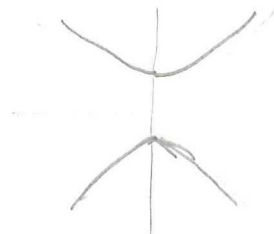
[DEFINITIE III.6.2]

2 ELKE BEGRENSEDE GEHELE FUNCTIE IS CONSTANT
[STELLING II.3.7]

3 a) SCHRYF $z = x+iy$ EN WERK z^2 UIT:

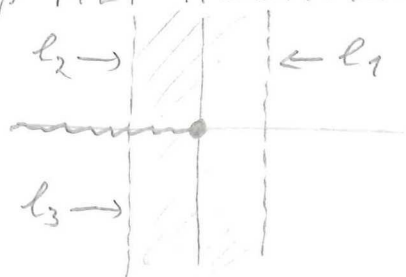
$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

WE MOETEN $x^2 - y^2 = 1$ OF $y^2 = 1 + x^2$ HIERBEN DAT IS DE VERGELIJING VAN EEN HYPERBOOL



b) ALS BOVEN: DE HYPERBOOL $x^2 - y^2 = 1$ WORDT DOOR $z \mapsto z^2$ OP DE LYN $\text{Re } z = 1$ AFGEBEELD

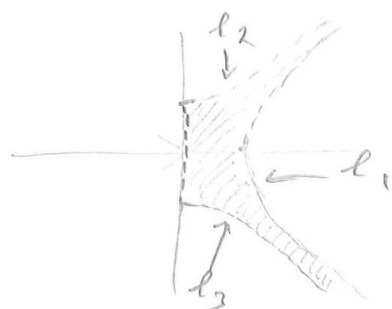
DE HOOFDTAK VAN DE WORTEL BEELDT $\mathbb{C}_-$ AF OP HET RECHTERHALFVLAK $\{z: \text{Re } z > 0\}$



• DUS l_1 WORDT OP DE RECHTER TAK VAN $x^2 - y^2 = 1$ AFGEBEELD

• l_2 GAAT NAAR DE HIELFT VAN DE BOVENSTE TAK VAN $x^2 - y^2 = -1$ IN HET EERSTE KWADRANT

• l_3 NAAR DE HIELFT VAN DE ONDERSTE TAK IN HET VIERDE KWADRANT



ONS GEBIED WORDT OP HET VLAKKEEL AFGEBEELD BEGRENSD DOOR DIEELTUKKEN HYPERBOOL EN DE IMAGINAIRE AS

4 a) GEBRUIK HET BENYUS VAN DE STELLING VAN RIEDMANN

[STELLING III.4.2 ; SLIDES 20100605 (p.20)
20100626 (p.13)]

DEFINIEER $h: D(a) \rightarrow \mathbb{C}$ DOOR

$$h(z) = \begin{cases} 0 & z=a \\ (z-a)f(z) & z \neq a \end{cases}$$

DAN IS h ANALYTISCH OP D EN CONTINU IN a

$$\text{WANT } |h(z)| = |(z-a)f(z)| \leq \frac{|z-a|}{\sqrt{|z-a|}} = \sqrt{|z-a|}$$

$$\text{EN } \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{|z-a|} = 0$$

DUS h IS ANALYTISCH OP $D(a)$

OMDAT $h(a) = 0$ ZIET DE MACHTREEKS VAN h ROND a ER UIT ALS

$$a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \dots$$

VOOR $z \neq a$ GELDT

$$f(z) = a_1 + a_2(z-a) + a_3(z-a)^2 + \dots$$

DE SOM $f(z)$ VAN DEZE MACHTREEKS IS ANALYTISCH OP $U_R(a)$ VOOR EEN $R > 0$ EN VOLDOET AAN $f(z) = f(z)$ VOOR $z \neq a$.

b) ER GELDT $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$

$$\text{WANT } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|z-a|}} = \infty$$

• DUS 0 IS GEEN OPHEFBARE SINGULARITEIT

• OOK NIET ESSENTIEEL

$$\text{OP } U'_3(0) \text{ GELDT } |f(z)| > \frac{1}{5}$$

DUS $f[U'_3(0)]$ IS NIET DICHT IN $\mathbb{C}$

CASORATI-WEIERSTRASS: 0 IS GEEN ESSENTIELE SINGULARITEIT.

So) $\text{LOG } i = \frac{\pi}{2} i$ EN $\text{LOG } (-i) = \frac{3\pi}{2} i$
 DUS $i \text{ LOG } i = -\frac{\pi}{2}$ EN $i \cdot \text{LOG } (-i) = -\frac{3\pi}{2}$
 EN DUS $i^i = \text{EXP}(-\frac{\pi}{2})$ EN $(-i)^i = \text{EXP}(-\frac{3\pi}{2})$

b) PAS DE RESIDUENSTELLING TOE

• i EN $-i$ ZYN DE ENIGE GEISOLEERDE SINGULARITEITEN VAN $\frac{z^i}{(z^2+1)^2}$

• $\chi(\alpha; i) = 0$

• $\chi(\alpha; -i) = 2$

• DE INTEGRAL IS DUS GELYK AAN $2\pi i \cdot 2 \cdot \text{RES}(f; -i)$

• $\text{RES}(f; -i)$:

- DIFFERENTIEER $(z+i)^2 f(z) = \frac{z^i}{(z-i)^2}$:

- $\frac{(z-i)^2 i z^{i-1} - 2(z-i) z^i}{(z-i)^4}$

- $-i$ INVULLEN: $\frac{(-2i)^2 \cdot i \cdot \text{EXP}(-\frac{3\pi}{2}) \cdot (-i)^{-1} - 2 \cdot (-2i) \text{EXP}(-\frac{3\pi}{2})}{(-2i)^4}$

$= \text{EXP}(-\frac{3\pi}{2}) \left[\frac{-4 \cdot i \cdot \frac{1}{-i} - 2 \cdot -2i}{16 i^4} \right]$

$= \text{EXP}(-\frac{3\pi}{2}) \left[\frac{4 + 4i}{16} \right]$

$= \frac{1+i}{4} \cdot \text{EXP}(-\frac{3\pi}{2})$

• DE INTEGRAL IS GELYK AAN

$4\pi i \cdot \frac{(1+i)}{4} \cdot \text{EXP}(-\frac{3\pi}{2})$

$= \underline{\underline{\pi e^{\frac{-3\pi}{2}} \cdot (-1+i)}}$

6 WE SUBSTITUEREN $z = e^{it}$
 DUS $dz = i e^{it} dt$
 OF $dt = \frac{1}{iz} dz$

VERDER $\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ EN $\cos 2t = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right)$

VUL IN: $\frac{\cos 2t}{13 - 5 \cos t} dt$ WORDT $\frac{\frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right)}{13 - \frac{5}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \cdot \frac{1}{iz} dz$

FUNCTIE OPKNAPPEN:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{i} \cdot \frac{z^4 + 1}{z^2} \cdot \frac{1}{26z - 5z^2 + 5} = i \cdot \frac{z^4 + 1}{z^2(5z^2 - 26z + 5)} \\ &= i \cdot \frac{z^4 + 1}{z^2(5z - 1)(z - 5)} \\ &= \frac{i}{5} \cdot \frac{z^4 + 1}{z^2 \left(z - \frac{1}{5} \right) (z - 5)} \end{aligned}$$

DE INTEGRAL WORDT DUS

$$\frac{i}{5} \oint_{|z|=1} \frac{z^4 + 1}{z^2 \left(z - \frac{1}{5} \right) (z - 5)} dz \quad \text{SINGULARITEITEN:}$$

$0, \frac{1}{5} \text{ EN } 5$

HIERVAN LIGGEN 0 EN $\frac{1}{5}$ BINNEN DE CIRKEL $|z|=1$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; 0) &= i \cdot \left(\frac{z^4 + 1}{5z^2 - 26z + 5} \right)' \Big|_{z=0} \\ &= i \cdot \frac{4z^3(5z^2 - 26z + 5) - (z^4 + 1)(10z - 26)}{(5z^2 - 26z + 5)^2} \Big|_{z=0} \\ &= i \cdot \frac{0 - (1) \cdot (-26)}{5^2} = \frac{26}{25} i \end{aligned}$$

$$\text{Res}(f; \frac{1}{5}) = i \cdot \left(\frac{z^4 + 1}{5z^2(z - 5)} \right)' \Big|_{z=\frac{1}{5}} = i \cdot \frac{\frac{1}{625} + 1}{5 \cdot \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{5} - 5 \right)} = -\frac{313}{300} i$$

ONZE INTEGRAL IS GELIJK AAN

$$\begin{aligned} 2\pi i \left(-\frac{313}{300} i + \frac{26}{25} i \right) &= 2\pi i^2 \left(-\frac{313}{300} + \frac{312}{300} \right) \\ &= \frac{2\pi}{300} \\ &= \frac{\pi}{150} \end{aligned}$$

7

WE GEBRUIKEN DE HOOFDTAK VAN $z^{1/3}$

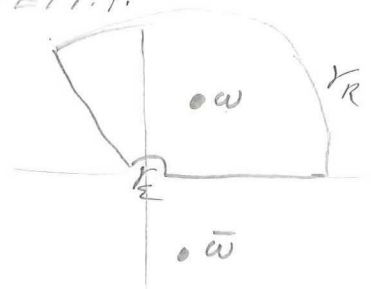
(DUS $z^{1/3} = \exp(\frac{1}{3} \log z)$)

EN DEFINIËREN $f(z) = \frac{z^{1/3}}{z^3 + 1}$

DEZE FUNCTIE HEEFT TWEE GEÏSOLEERDE SINGULARITEITEN $\omega = \exp(\frac{\pi i}{3})$ EN $\bar{\omega} = \exp(-\frac{\pi i}{3})$ (-1 LIGT OP DE NEGATIEVE REËLE AS EN IS GEEN GEÏSOLEERDE SINGULARITEIT.).

WE GEBRUIKEN DE CONTOUR $\Gamma_{\varepsilon, R}$ DIE BESTAAT UIT (MET $0 < \varepsilon < 1 < R$)

- HET INTERVAL/LYNSTUK $[\varepsilon, R]$
- DE BOOG $\gamma_R : \{R e^{it} : 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}\}$
- HET LYNSTUK $L = \{x \omega^2 : R \geq x \geq \varepsilon\}$ (NB $e^{2\pi i/3} = \omega^2$)
- DE BOOG $\gamma_\varepsilon : \{\varepsilon e^{it} : \frac{2\pi}{3} \geq t \geq 0\}$



ALLEEN ω LIGT BINNEN $\Gamma_{\varepsilon, R}$ DUS

$$\oint_{\Gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{RES}(f; \omega) = 2\pi i \frac{\omega^{1/3}}{3\omega^2} \quad (\text{WANT POOL VAN ORDE 1})$$

DIT KUN JE OMSCHRYVEN TOT

$$\begin{aligned} 2\pi i \frac{\omega \omega^{1/3}}{3\omega^3} &= -\frac{2\pi i}{3} e^{\frac{\pi i}{3}} e^{\frac{\pi i}{9}} = -\frac{2\pi i}{3} \exp(i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9})) \\ &= \frac{2\pi}{3} \exp(i(-\pi + \frac{17\pi}{18})) \\ &= \frac{2\pi}{3} \exp(-\frac{1}{18}\pi i) \end{aligned}$$

DE INTEGRAL SPLITSSEN

$$\bullet [\varepsilon, R] : \int_{[\varepsilon, R]} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{x^{1/3}}{x^3 + 1} dx$$

$$\begin{aligned} \bullet L : \int_L f(z) dz &= \int_R^{\varepsilon} \frac{(x\omega^2)^{1/3}}{(x\omega^2)^3 + 1} d(x\omega^2) = \omega^2 e^{\frac{2\pi i}{9}} \int_{\varepsilon}^R \frac{x^{1/3}}{x^3 + 1} dx \\ &= -\exp(\frac{10}{9}\pi i) \int_{\varepsilon}^R \frac{x^{1/3}}{x^3 + 1} dx = \exp(-\frac{\pi i}{9}) \int_{\varepsilon}^R \frac{x^{1/3}}{x^3 + 1} dx \end{aligned}$$

$$\bullet \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi}{3} R \cdot \frac{R^{1/3}}{R^3 - 1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\bullet \left| \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi}{3} \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{1/3}}{1 - \varepsilon^3} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$\text{DUS } \frac{2\pi}{3} \exp(-\frac{1}{18}\pi i) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \oint_{\Gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = \left(1 + \exp(-\frac{\pi i}{9})\right) \int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{x^3 + 1} dx$$

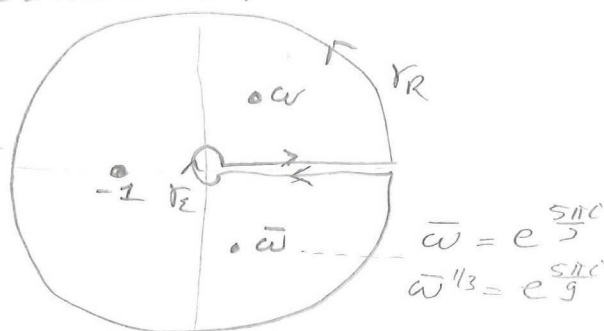
$$\begin{aligned} \text{OFWEL } \int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{x^3 + 1} dx &= \frac{2\pi \exp(-\frac{1}{18}\pi i)}{3(1 + \exp(\frac{\pi i}{9}))} \\ &= \frac{2\pi}{3(\exp(\frac{\pi i}{18}) + \exp(-\frac{\pi i}{18}))} \\ &= \frac{\pi}{3 \cos \frac{\pi}{18}} \end{aligned}$$

7 ALTERNATIEF

NEEM DE TAK VAN DE LOGARITME MET $0 < \arg z < 2\pi$
 EN DEFINIEER $z^{1/3} = \exp(\frac{1}{3} \log z)$

NU KUN JE DEZE CONTOUR GEBRUIKEN:

- $[\epsilon, R]$ BOVENLANGS $\epsilon \leq x \leq R$
- $R e^{i\epsilon}$ $0 \leq \epsilon \leq 2\pi$
- $[R, \epsilon]$ ONDERLANGS $x e^{2\pi i} R \geq x \geq \epsilon$
- $\epsilon e^{i\epsilon}$ $2\pi \geq \epsilon \geq 0$



NU

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_{\epsilon, R}} f(z) dz &= 2\pi i (\text{RES}(f; \omega) + \text{RES}(f; -1) + \text{RES}(f; \bar{\omega})) \\ &= 2\pi i \left(\frac{\omega^{1/3}}{3\omega^2} + \frac{(-1)^{1/3}}{3 \cdot (-1)^2} + \frac{\bar{\omega}^{1/3}}{3 \cdot \bar{\omega}^2} \right) \\ &= \frac{2\pi i}{3} \left(-\omega \omega^{1/3} + (-1)^{1/3} - \bar{\omega} \bar{\omega}^{1/3} \right) \\ &= \frac{2\pi i}{3} \left(-\exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right) - \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right) - \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

OOK NU

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

$$\text{EN } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = 0$$

$$\text{EN } \int_{[\epsilon, R]} f(z) dz = \int_{\epsilon}^R \frac{x^{1/3}}{x^3 + 1} dx$$

$$\begin{aligned} \int_{[R, \epsilon]} f(z) dz &= \int_R^{\epsilon} \frac{(x e^{2\pi i})^{1/3}}{(x e^{2\pi i})^3 + 1} d(x e^{2\pi i}) \\ &= -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_{\epsilon}^R \frac{x^{1/3}}{x^3 + 1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{DUS } \frac{2\pi i}{3} \left(-e^{\frac{4\pi i}{3}} - e^{\frac{4\pi i}{3}} - e^{\frac{2\pi i}{3}} \right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_{\epsilon, R}} f(z) dz \\ &= (1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}) \int_0^{\infty} \frac{x^{1/3}}{x^3 + 1} dx \end{aligned}$$

HET UITWERKEN WORDT IEIS VERVELENDEND