Mekelweg 4, 2628 CD DELFT

tentamen Analyse (deel 2) – wi 1 005 In, dl. 2

deel 2

24 januari 2007, 09.00–11.00 uur

Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.

Het ***formuleblad*** *van het instellingspakket en een* ***rekenmachine*** *mogen worden gebruikt.*
Onderling contact, communicatieapparatuur, boeken en aantekeningen zijn **niet** *toegestaan.*

Elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie te worden voorzien.
Tenzij anders gevraagd worden exacte antwoorden verlangd. 6

1. Bereken met de regel van De l'Hospital of met behulp van machtreeksen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\,\sin(x)}\,.$$ 6

2. Geef een voorbeeld van een *convergente* rij (a_n)
waarbij de bijbehorende reeks $\sum a_n$ *divergent* is. 4

3. Gegeven is de *reeks* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

   a) Ga na of deze reeks convergent, dan wel divergent is.
   Toon dit aan met behulp van een van de behandelde kenmerken. 8

   b) Gebruik nu een *ander* kenmerk om je conclusie te staven. 4

4. Bepaal convergentiestraal en convergentie-interval van de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\,(x+3)^n\,.$$ 8

5. Laat de functie $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x)=x\tan x$.
Bepaal de eerste *drie* termen van de Taylorreeks van f rond het *punt* $a=\frac{\pi}{4}$. 8
Aanwijzing: gebruik zo je wilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x)=1+\tan^2(x)$.

6. Op een zeker domein $D\subset\mathbb{R}^2$ is een functie $F:D\to\mathbb{R}$ gegeven door

$$F(x,y)=\frac{x^2\ln y}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

   a) Teken het grootst mogelijke *domein* D. 2

   b) Bereken $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ in D. 6

7. Bereken $\displaystyle\iint_R \frac{y^3}{x}\,\mathrm{d}A$ als $R=[1,\mathrm{e}]\times[0,2]$. 8

<u>Normering</u>

Elk onderdeel levert maximaal het aantal in de kantlijn vermelde punten op.
Als t het aantal toegekende punten is, en q het resultaat van de quizzen voor deel 2
$(6\le t\le 60$ *en* $0\le q\le 10)$, *is het cijfer* $c=\max\{\frac{t}{6},\frac{t+4q}{10}\}$ $(c\in\mathbb{N},\ 1\le c\le 10)$.

1. We geven voor beide methoden een uitwerking. § 4.4 / 11.10

SOM STEWART, 5TH ED., § 4.4, 27) (VAN DE LIJST) HEEFT DEZELFDE TELLER

regel van De l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\,\sin x} \overset{\text{l'Hos}}{\underset{[\frac{0}{0}]}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin x + x\,\cos x} \overset{\text{l'Hos}}{\underset{[\frac{0}{0}]}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x + \cos x - x\,\sin x} = \frac{1}{2}\,.$$

6

machtreeksen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\,\sin x} \overset{(6),(7)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4))}{x\,(x+O(x^3))} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2+O(x^4)}{x^2+O(x^4)} = \frac{1}{2}\,.$$

2. Voor convergentie van een reeks is het noodzakelijk dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Elke rij (a_n) met $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ kan dus als voorbeeld dienen, zolang de betreffende limiet maar bestaat. § 11.1

4

Dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ niet volstaat blijkt uit het voorbeeld van de harmonische reeks; ook een p-reeks met $p < 1$ vormt een voorbeeld.

3. Convergentie van de reeks hangt niet af van de eerste term; we zullen in het onderstaande slechts convergentie bij sommatie vanaf 1 nagaan. De conclusies zijn ook vanaf 0 geldig.

Het onderzoek kan met beide vergelijkingskenmerken en met het integraalkenmerk[1].

a) Met het majorante-/minorantekenmerk blijkt de bedoelde reeks convergent: § 11.4

- $0 < \frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{n^2}$; en
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent ($p = 2$).

[of:] Met het limietkenmerk blijkt de bedoelde reeks convergent: 8

- $0 < \frac{1}{1+n^2}$ en $0 < \frac{1}{n^2}$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$; en
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent ($p = 2$).

b) Met het integraalkenmerk blijkt de bedoelde reeks convergent: § 11.3

- $0 < \frac{1}{1+x^2}$;
- $\frac{1}{1+x^2}$ is continu; 4
- $\frac{1}{1+x^2}$ is dalend; en
- $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan x]_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < \infty$.

[of:] De laatste stap had ook met het vergelijkingskenmerk voor oneigenlijke integralen kunnen worden gezet.

z.o.z.

4. De convergentiestraal kan zowel met het verhoudingskenmerk van d'Alembert als met het wortelkenmerk van Cauchy worden bepaald; we tonen ze beide. § 11.8

d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\,(x+3)^{n+1}}{\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\,(x+3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} 2\,\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\,|x+3| = 2\,|x+3| = 1 \ \text{ als } \ |x+3| = \tfrac{1}{2}\,.$$

De convergentiestraal (rond -3) blijkt dus $\frac{1}{2}$.

Cauchy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\,(x+3)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}\,|x+3| = 2\sqrt{\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}}\,|x+3| \overset{(*)}{=} 2\,|x+3|\,.$$ [2]

Voor het vervolg zie boven.

8

[of:] Wie ziet dat de reeks in $-\frac{5}{2}$ (*zie onder*) relatief convergent is, heeft een randpunt van het convergentie-interval ontdekt, en kan daaruit de convergentiestraal afleiden.

We onderzoeken nu de randpunten ($-\frac{7}{2}$ en $-\frac{5}{2}$):

$-\mathbf{\frac{7}{2}}$: invullen levert de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\,(-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; deze reeks is divergent ($p = \frac{1}{2} < 1$); en

$-\mathbf{\frac{5}{2}}$: invullen levert de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$; deze reeks is relatief convergent: absolute convergentie geldt niet op grond van bovenstaande, maar de reeks is wel convergent; gebruik het kenmerk van Leibniz:

- $0 < \frac{1}{\sqrt{n}}$; derhalve is de reeks alternerend;
- $\frac{1}{\sqrt{n}}$ is dalend; en
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0\,.$

Het convergentie-interval is dus $(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}]\,.$

DIT IS STEWART, 5TH ED., § 11.8, 18)

5. De Taylorreeks van f rond $a = \frac{\pi}{4}$ luidt: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\frac{\pi}{4})}{n!}\,(x-\frac{\pi}{4})^n\,.$ § 11.10

We hebben de termen nodig tot en met $n = 2$ en differentiëren f daartoe twee maal:

$$f(x) = x\tan x \Longrightarrow f'(x) = 1\cdot\tan x + x\cdot(1+\tan^2 x) \Longrightarrow$$
$$f''(x) = (1+\tan^2 x) + 1\cdot(1+\tan^2 x) + x\cdot 2\tan x\cdot(1+\tan^2 x)\,.$$

8

We vullen $\frac{\pi}{4}$ in en vinden $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}\cdot 1$, $f'(\frac{\pi}{4}) = 1+\frac{\pi}{4}\cdot 2$ en $f''(\frac{\pi}{4}) = 2+2+\frac{\pi}{4}\cdot 2\cdot 2\,.$

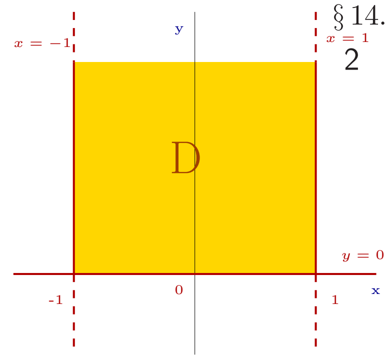
Het gevraagde begin van de Taylorontwikkeling is daarmee

$$\tfrac{\pi}{4} + (1+\tfrac{\pi}{2})\,(x-\tfrac{\pi}{4}) + (2+\tfrac{\pi}{2})\,(x-\tfrac{\pi}{4})^2\,.$$

$\boxed{\longrightarrow}$

[1]in beide onderdelen een verschillend vergelijkingskenmerk toepassen voldoet aan de vraagstelling
[2]de bij (*) gebruikte limiet wordt niet meer behandeld

6. a) Het domein (*zie figuur*) wordt beperkt door drie eisen: § 14.1



2

- onder het wortelteken moet een niet-negatieve uitdrukking staan; dus: $x^2 \leq 1$
- de noemer mag niet 0 worden; dus: $x^2 \neq 1$; en
- achter de $\ln$ moet een positieve uitdrukking staan; dus: $y > 0$.

We vinden zo: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1 \,, y > 0\}$.

b) $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot 2x \ln y - x^2 \ln y \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{2x\,(1-x^2)\,\ln y + x^3 \ln y}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \,.$$ § 14.3

[of:] Dit kan ook met de productregel. 6

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{y} \,.$$

7. $$\iint\limits_R \frac{y^3}{x}\,\mathrm{d}A = \int_1^{\mathrm{e}} \int_0^2 \frac{y^3}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \cdot 4\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \Big[\ln|x|\Big]_1^{\mathrm{e}} = 4 \,.$$ § 15.2

8

[of:] *Opmerking*: de andere integratievolgorde gaat net zo; de integraal kan zelfs worden opgevat als product van twee integralen, daar de integrand het product is van een functie van x en een functie van y , en voorts de grenzen vast zijn.