Mekelweg 4, 2628 CD DELFT

tentamen Analyse (deel 1 & 2) – wi 1 1005 In

hele stof

25 augustus 2006, 09.00–12.00 uur

Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.

Het ***formuleblad*** *van het instellingspakket en een* **rekenmachine** *mogen worden gebruikt.*
Onderling contact, communicatieapparatuur, boeken en aantekeningen zijn ***niet*** *toegestaan.*

Elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie te worden voorzien.
Tenzij anders gevraagd worden exacte antwoorden verlangd.

1. Een kromme[1] is gegeven door de impliciete vergelijking $y^2 = x^3 + 3x^2$.
   a) Bepaal de raaklijn aan deze kromme in het punt $(1, -2)$. — 10
   b) In welke punten bezit de kromme een horizontale raaklijn? — 4

2. Bereken $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$. — 8

3. Bereken $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. — 10

4. a) Vind de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $xy' - 1 = y^2$. — 8
   b) Vind de oplossing van het beginvoorwaardeprobleem $\begin{cases} xy' - 1 = y^2 \\ y(1) = -1 \end{cases}$. — 4

5. Toon aan dat de volgende reeks divergent is: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n + \cos(n^2)}$. — 10

6. Bepaal het convergentiegebied van de volgende machtreeks: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{5^n}$. — 12

7. Schrijf $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$ in de vorm $a + bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$. — 6

8. Bepaal alle partiële afgeleiden van de tweede orde (*second partial derviatives*) van de functie $F(x, y) = x^2 \sin y$. — 10

9. Bereken de volgende integraal: $\displaystyle\int_1^2 \int_0^x \frac{y}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$. — 8

<u>Normering</u>

Elk onderdeel levert maximaal het aantal in de kantlijn vermelde punten op.
Als t het aantal toegekende punten is is het cijfer $c = \frac{t}{10}$ $(c \in \mathbb{N})$. — 10

[1] bekend van Tschirnhausen

1. a) Beschouw (locaal) y als functie van x en differentieer de beide leden van de vergelijking *impliciet* naar x; er komt: $2yy' = 3x^2 + 6x$.

   Vul nu de coördinaten van het gegeven punt in: $x = 1$, $y = -2$.
   We vinden: $-4y' = 9 \Longrightarrow y' = -\frac{9}{4}$. 10

   De bedoelde raaklijn is de lijn door $(1, -2)$ met richtingscoëfficiënt $-\frac{9}{4}$:
   $y + 2 = -\frac{9}{4}(x - 1) \Longleftrightarrow 9x + 4y = 1$.

   b) Raaklijnen verlopen horizontaal waar $y' = 0$. Invullen in $2yy' = 3x^2 + 6x$ geeft $3x^2 + 6x = 0 \Longleftrightarrow x \in \{0, -2\}$. Als $x = 0$ geldt (invullen in de oorspronkelijke impliciete vergelijking) $y^2 = 0 \Longrightarrow y = 0$; als $x = -2$ is $y^2 = 4 \Longrightarrow y \in \{-2, 2\}$. 4

   Er zijn al met al *drie* punten waar de raaklijn horizontaal verloopt: de punten
   $(0, 0)$, $(-2, -2)$ en $(-2, 2)$.

2. In de integrand herkennen we de afgeleide van $\arcsin x$. Substitueer $u = \arcsin x \Longrightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; $x = 0 \Longrightarrow u = 0$ en $x = \frac{1}{2} \Longrightarrow u = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Daarmee wordt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} u \,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{72}.$$ 8

3. Door middel van partële integratie wordt eerst een primitive van de integrand bepaald ($u = \ln x$ en $v' = x^{-\frac{3}{2}}$ en dus $u' = \frac{1}{x}$ en $v = -2x^{-\frac{1}{2}}$):

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \ln x \cdot \frac{-2}{\sqrt{x}} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{-2}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = -2\,\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + \int 2\,x^{-\frac{3}{2}}\, \mathrm{d}x = -2\,\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 4\,x^{-\frac{1}{2}}.$$ 10

Dus is $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \left[-2\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left(-2\frac{\ln t}{\sqrt{t}} - \frac{4}{\sqrt{t}}\right) - \left(-2\frac{\ln 1}{\sqrt{1}} - \frac{4}{\sqrt{1}}\right) =$
$0 + 0 + 0 + 4 = 4$.

4. a) $xy' - 1 = y^2 \overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} y' = \frac{1+y^2}{x}$ laat zien dat de differentiaalvergelijking separabel is. Scheiden van de veranderlijken en primitiveren leveren vervolgens: 8

$$\frac{y'}{1 + y^2} = \frac{1}{x} \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Longleftrightarrow \arctan y = \ln x + C \Longleftrightarrow y = \tan(\ln x + C).$$

   In bovenstaande afleiding is $x \neq 0$ verondersteld. Als toch $x = 0$ moet de oorspronkelijke differentiaalvergelijking worden gelezen als $-1 = y^2$. Deze heeft (binnen $\mathbb{R}$) geen oplossing.

   b) We zoeken de oplossing die voldoet aan $y(1) = -1$. Invullen van $x = 1$ en $y = -1$ leidt tot de voorwaarde $\arctan -1 = \ln 1 + C \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{4} = C$. 4

   De gezochte oplossing is derhalve $y = \tan(\ln x - \frac{\pi}{4})$.

z.o.z.

5. De invloed van de cosinus is klein; zonder cosinus staat er een variant van de harmonische reeks. Dit brengt ons op de volgende aanpak: 10

$$\frac{1}{3n+\cos n^2} > 0 \text{ en } \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3n+\cos n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+\cos n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}\cos n^2} = \tfrac{1}{3+0} = \tfrac{1}{3}$$

in combinatie met het limietkenmerk laten zien dat de gegeven reeks zich gedraagt als de harmonische reeks. Daar deze laatste divergent is blijkt ook $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+\cos n^2}$ divergent.

6. Gebuikmaking van het verhoudingskenmerk van d' Alembert levert: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^3 x^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{n^3 x^n}{5^n}} \right| =$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^3}{n^3} \cdot \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| \cdot \frac{5^n}{5^{n+1}} \right) = \lim_{n\to\infty} (1+\tfrac{1}{n})^3 \cdot |x| \cdot \tfrac{1}{5} = \tfrac{|x|}{5} = 1 \Longleftrightarrow |x| = 5\,.$$

De convergentiestraal bedraagt dus 5. Het convergentiegebied is een -interval rond 0. 12

Randonderzoek: zowel voor $x=-5$ als voor $x=5$ geldt dat de algemene term van de reeks niet naar 0 gaat — haar absolute waarde bedraagt immers n^3. In de randpunten treedt dus geen convergentie op.

Het convergentiegebied is het interval $(-5,5)$.

7. Schrijf $z = 1-\sqrt{3}\,i$ eerst in modulus-argumentvorm (of in exponentiële vorm):

$$z = 2\,(\cos\tfrac{5}{3}\pi + i\sin\tfrac{5}{3}\pi) = \mathrm{e}^{\frac{5}{3}\pi i}\text{, want } |z| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2 \text{ en}$$

$$\arg z = \tfrac{5}{3}\pi \text{ daar } \cos\tfrac{5}{3}\pi = \tfrac{1}{2} = \tfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} \text{ en } \sin\tfrac{5}{3}\pi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}\,.$$

Met de formule van De Moivre (of met rekenregels van complexe exponentiële functies) volgt dat $\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^5 = z^5 = |z|^5\,(\cos 5\,\arg z + i\,\sin 5\,\arg z) = 2^5\,(\cos\frac{25}{3}\pi + i\,\sin\frac{25}{3}\pi) =$ 6
$32\,(\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 16+16\sqrt{3}\,i$.

[of:] Gebruikmaken van het binomium van Newton is mogelijk, doch tamelijk omslachtig:

$$\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^5 = 1^5 + 5\cdot1^4\cdot(-\sqrt{3}i) + 10\cdot1^3\cdot(-\sqrt{3}i)^2 + 10\cdot1^2\cdot(-\sqrt{3}i)^3 + 5\cdot1\cdot(-\sqrt{3}i)^4 + (-\sqrt{3}i)^5 =$$
$$1 - 5\sqrt{3}\,i - 10\cdot3 + 10\cdot3\sqrt{3}\,i + 5\cdot3^2 - 3^2\sqrt{3}i = 16+16\sqrt{3}\,i\,.$$

8. $\frac{\partial F}{\partial x} = F_x = 2x\sin y \Longrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F_{xx} = 2\sin y$ en $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = F_{xy} = 2x\cos y$ en ook
$\frac{\partial F}{\partial y} = F_y = x^2\cos y \Longrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = F_{yy} = -x^2\sin y$ en $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F_{yx} = 2x\cos y$. 10
De gemengde partiële afgeleiden zijn natuurlijk aan elkaar gelijk.

9. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^x \frac{y}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\,y^2\right]_{y=0}^{x} \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = \frac{3}{4}\,.$ 8

10