Mekelweg 4, 2628 CD DELFT

tentamen Analyse (deel 1 + 2) – wi 1 005 In, dl. 1 + 2
25 januari 2006, 09.00–12.00 uur

hele stof

Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.

Het ***formuleblad*** *van het instellingspakket en een* ***rekenmachine*** *mogen worden gebruikt.*
Onderling contact, communicatieapparatuur, boeken en aantekeningen zijn ***niet*** *toegestaan.*

Elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie te worden voorzien.
Tenzij anders gevraagd worden exacte antwoorden verlangd.

Let op: vul de juiste code in waaronder je resultaten moeten worden geregistreerd —

wi 1 005, gehele stof voor studenten in het nieuwe Informatica-curriculum, en 8
wi 1 005 THEt, gehele stof voor studenten in de Elektrotechniek-schakelklas.

1. Bereken met de regel van De l'Hospital of met behulp van machtreeksen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\,. \qquad 6$$

2. a) Differentieer $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ naar x. 4

   b) Gegeven zij het punt $(2, 2\sqrt{2})$ op de ellips $x^2 + 4y^2 = 36$. 6
   Geef de vergelijking van de raaklijn in het gegeven punt aan de ellips.

3. a) Bereken $\int\limits_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0)$. 6

   b) Bereken $\int\limits_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. 6

4. Is de volgende reeks absoluut of relatief (*conditionally*) convergent, of divergent?

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{\sqrt[4]{n^3 + 8n^2 + 6}}\,. \qquad 8$$

5. a) Bepaal een machtreeks van de vorm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ voor $\cos(2x^3)$. 8

   b) Geef de convergentiestraal van de machtreeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n^2\,5^n}$. 4

z.o.z.

6. Op het domein $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ is een functie $f : D \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = y \ln x \,.$$ 6

Bereken $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

7. Bereken $\displaystyle\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}A$ als $R = [-1,1] \times [0,1]$. 6

8. a) Los op: $y'' + 9y' = 1 + \mathrm{e}^{9x}$. 8

b) Bepaal alle oplossingen van $2z^2 - 2z + 1 = 0$ en teken deze in het complexe vlak. 4

Normering

Elk onderdeel levert maximaal het aantal in de kantlijn vermelde punten op.
Als t het aantal toegekende punten is, en q het resultaat van de quizzen voor deel 2 ($8 \le t \le 80$ en $0 \le q \le 10$), is het cijfer $c = \max\{\frac{t}{8}, \frac{t+2q}{10}\}$ ($c \in \mathbb{N}$, $1 \le c \le 10$).

1. **met de regel van De l'Hospital:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \left[\tfrac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hos}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} \left[\tfrac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hos}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = -\tfrac{1}{2}\,; \qquad 6$$

met reeksontwikkelen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+\cdots\right)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(-\tfrac{1}{2}+\cdots\right) = -\tfrac{1}{2}\,.$$

2. a) Gebruik de quotiëntregel: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} - \ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{1-\frac{1}{2}\ln x}{x\sqrt{x}}\,.$ 4

b) Zie y als functie van x en differentieer beide leden van de vergelijking impliciet naar x. Er komt: $2x + 8yy' = 0$. Omdat we de richtingscoëfficiënt in het punt $(2, 2\sqrt{2})$ moeten weten vullen we $x = 2$ en $y = 2\sqrt{2}$ in. Dit levert

$$4 + 16\sqrt{2}\,y' = 0 \Longleftrightarrow y' = -\frac{4}{16\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,. \qquad 6$$

De vergelijking van de raaklijn door $(2, 2\sqrt{2})$ is dus

$$y - 2\sqrt{2} = -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,(x-2) \Longleftrightarrow x + 4\sqrt{2}\,y = 18\,.$$

3. a) Neem $u = a^2 - x^2 \Longrightarrow \mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$ en $x = 0 \leftrightarrow u = a^2$ en $x = a \leftrightarrow u = 0$. 6

De integraal gaat over in $\displaystyle\int_{a^2}^{0} -\frac{1}{2}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{3}u\sqrt{u}\right]_{a^2}^{0} = \frac{1}{3}a^3\,.$

b) Om de veelterm weg te werken integreren we twee keer partieel:

$$\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x} - \int -2x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right]_0^1 = \qquad 6$$

$$\left[-(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - \textstyle\int -2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right]_0^1 = \left[(-x^2-2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 3(1-\tfrac{2}{\mathrm{e}})\,.$$

Opmerking: dit is Stewart, 5$^{\text{th}}$ ed., § 7.1, 20) [uit de lijst].

4. **absolute convergentie:** gebruik het limietkenmerk. Merk eerst op dat de noemer zich voor grote n gedraagt als $\sqrt[4]{n^3}$ [1]. We vergelijken de reeks daarom met $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ [2]:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{\sqrt[4]{n^3+8n^2+6}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[4]{n^3+8n^2+6}} = 5\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{n^3}{n^3+8n^2+6}} =$
  $\displaystyle 5\sqrt[4]{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{8}{n}+\frac{6}{n^3}}} = 5\sqrt[4]{\frac{1}{1+0+0}} = 5$, terwijl
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ divergent is ($p = \frac{3}{4} < 1$); hieruit volgt:
- de reeks van absolute waarden van de gegeven reeks is divergent.

We weten nu dat de gegeven reeks *niet absoluut convergent* is. 8

relatieve convergentie: gebruik het kenmerk van Leibniz:

- de breuk is altijd positief, dus maakt de $(-1)^n$ de reeks *alternerend*;

[1] de andere termen onder het wortelteken zijn verhoudingsgewijs onbelangrijk

[2] we moeten de sommatie in 1 laten beginnen

- $\frac{5}{\sqrt[4]{(n+1)^3+8(n+1)^2+6}} < \frac{5}{\sqrt[4]{n^3+8n^2+6}}$ voor alle n, dus is de reeks van absolute waarden *dalend*; en
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt[4]{n^3+8n^2+6}} = \frac{5}{\infty} = 0$; hieruit volgt:
- de gegeven reeks is convergent.

De conclusie luidt dat de gegeven reeks *relatief convergent* is.

5. a) We vullen $y = 2x^3$ in in de Maclaurin-reeks van $\cos y$:

$$\cos(2x^3) = \cos y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x^3)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \frac{x^{6n}}{(2n)!}\,. \qquad 8$$

Opmerking: rechtstreekse berekening is veel werk en leidt niet tot een uitdrukking voor de algemene term van de machtreeks.

b) We gebruiken het verhoudingskenmerk van d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2\, 5^{n+1}}}{(-1)^n \frac{x^n}{n^2\, 5^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{5^n}{5^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \qquad 4$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot |x| = \frac{|x|}{5} = 1 \text{ als } |x| = 5 \Longrightarrow \text{de convergentiestraal is } 5.$$

6. $f(x,y) = y \ln x \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{y}{x} \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cdot \dfrac{-1}{x^2} = -\dfrac{y}{x^2}$ en $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot \ln x = \ln x$. 6

7. $R = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1 \text{ en } 0 \le y \le 1\}$ en dus is

$$\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left((1+x^2) \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$\int_{-1}^{1} \left((1+x^2) \cdot [\arctan y]_0^1 \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1+x^2) \cdot \tfrac{\pi}{4}\,\mathrm{d}x = \tfrac{\pi}{4} \left[x + \tfrac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{1} = \tfrac{\pi}{4} \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}\pi\,. \qquad 6$$

[of:]

$$\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \text{ met verwisselde integratievolgorde.}$$

8. a) **als tweede-orde differentiaalvergelijking:**

de gereduceerde differentiaalvergelijking $y'' + 9y' = 0$ heeft als karakteristieke vergelijking $r^2 + 9r = 0$ met de verschillende oplossingen 0 en -9; we vinden $y_\mathrm{r} = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-9x}$.

Omdat 0 al oplossing is van de karakteristieke vergelijking (en de gereduceerde oplossing dus al een constante term bevat) gebruiken we een extra factor x voor de eerste term van het rechterlid; dus bevat y_p een term ax.
De tweede term van het rechterlid leidt tot een term $b\mathrm{e}^{9x}$ in y_p (9 is geen oplossing van de karakteristieke vergelijking).

We nemen $y_\mathrm{p} = ax + b\mathrm{e}^{9x} \Longrightarrow y_\mathrm{p}' = a + 9b\,\mathrm{e}^{9x} \Longrightarrow y_\mathrm{p}'' = 81b\,\mathrm{e}^{9x}$ en vullen dit in in de oorspronkelijke niet-gereduceerde differentiaalvergelijking:

$$81b\,\mathrm{e}^{9x} + 9a + 81b\,\mathrm{e}^{9x} = 1 + \mathrm{e}^{9x} \Longleftrightarrow a = \tfrac{1}{9} \text{ en } b = \tfrac{1}{162} \Longrightarrow y_\mathrm{p} = \tfrac{1}{9}x + \tfrac{1}{162}\mathrm{e}^{9x}\,.$$

De algemene oplossing is $y_\mathrm{a} = y_\mathrm{p} + y_\mathrm{r} = \frac{1}{9}x + \frac{1}{162}\mathrm{e}^{9x} + C_1 + C_2\mathrm{e}^{-9x}$. 8

na omzetting in een eerste-orde differentiaalvergelijking:

we schrijven $z = y' \Longrightarrow z' = y''$; het ontbreken van een term met y zelf levert ons nu de eerste-orde differentiaalvergelijking $z' + 9z = 1 + \mathrm{e}^{9x}$.

Een integrerende factor is $I(x) = \exp\left(\int 9\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{9x}$ en de oplossing is

$$z = \frac{1}{\mathrm{e}^{9x}} \int \left(\mathrm{e}^{9x}(1 + \mathrm{e}^{9x})\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-9x} \int \left(\mathrm{e}^{9x} + \mathrm{e}^{18x}\right)\,\mathrm{d}x =$$
$$\mathrm{e}^{-9x}\left(\tfrac{1}{9}\mathrm{e}^{9x} + \tfrac{1}{18}\mathrm{e}^{18x} + C_3\right) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{18}\mathrm{e}^{9x} + C_3\mathrm{e}^{-9x}.$$

Om y te verkrijgen moeten we deze oplossing primitiveren:

$$y_{\mathrm{a}} = \int \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{18}\mathrm{e}^{9x} + C_3\mathrm{e}^{-9x}\right)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{9}x + \tfrac{1}{162}\mathrm{e}^{9x} - \tfrac{1}{9}C_3\mathrm{e}^{-9x} + C_4.$$

b) **kwadraatafsplitsen:**

$2z^2 - 2z + 1 = 2(z^2 - z + \tfrac{1}{2}) = 2\left((z - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow$
$(z - \tfrac{1}{2})^2 = -\tfrac{1}{4} = (\pm\tfrac{1}{2}i)^2$; we concluderen dat $x = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}i$. 4

met de aangepaste *abc*-formule:

$$z = \frac{--2 \pm i\sqrt{4\cdot 2\cdot 1 - (-2)^2}}{2\cdot 2} = \tfrac{1}{4}\left(2 \pm i\sqrt{4}\right) = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}i.$$