

Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science
Numerieke Methoden I, TW2060, BSc Technische Wiskunde
Examen, 15 augustus 2018, 13:30 - 16:30

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Round}(\frac{2\Sigma}{3})}{2}, \quad \text{waarin } \Sigma = \text{som over alle onderdelen.}$$

NB. Dit tentamen bestaat uit twee bladzijden!

1 In deze opgave beschouwen we de invloed van afrondfouten en numeriek differentieren van de functie $f(x)$ die als voldoende glad mag worden beschouwd voor de continuïteit van alle afgeleiden.

- a We willen de uitdrukking $f''(x) + f'(x)$ benaderen met een hoogst mogelijke orde van fout door middel van

$$Q(h) = \frac{\alpha_{-1}f(x-h) + \alpha_0f(x) + \alpha_1f(x+h)}{h^2}.$$

Bewijs dat hieruit $\alpha_{-1} = 1 - \frac{h}{2}$, $\alpha_0 = -2$, en $\alpha_1 = 1 + \frac{h}{2}$ volgt. (2pt)

- b *Bewijs dat voor $Q(h)$ uit onderdeel 1b volgt*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x) + f'(x) - Q(h)}{h^2} = K,$$

druk K uit in de afgeleiden van $f(x)$. (3pt)

- c Stel dat iedere functie-evaluatie $f(x-h)$, $f(x)$ en $f(x+h)$ een onzekerheid bevat, dwz $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) voor alle $x \in \mathbb{R}$, waarin $\tilde{f}(x)$ de beschikbare functiewaarden van $f(x)$ zijn, waarmee we $\tilde{Q}(h)$ berekenen. Met de exacte waarden van $f(x)$ berekenen we $Q(h)$. We nemen verder aan dat er een $\hat{K} > 0$ is waarvoor $|Q(h) - (f''(x) + f'(x))| \leq \hat{K}h^2$. *Bewijs dat de grootte van de totale fout van boven geschat wordt door*

$$|\tilde{Q}(h) - (f''(x) + f'(x))| \leq \hat{K}h^2 + \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{\varepsilon}{h}.$$

(3pt)

- d *Motiveer op grond van het resultaat in opgave 1d dat de nauwkeurigheid erg kan verslechteren als men de stapgrootte h te klein kiest.* (2pt)

2 We beschouwen interpolatie en numerieke integratie. De functie $f(x)$ is voldoende glad voor continuïteit van alle afgeleiden.

- a Gegeven de functiewaarden voor de punten $(x_i, f(x_i))$ en $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ met $x_i < x_{i+1}$. *Laat zien dat het lineaire interpolatiepolynoom, $L(x)$, gegeven is door*

$$L(x) = f(x_i) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

(2pt)

- b *Leid, met het resultaat uit opgave 2a, de Trapeziumregel, gegeven door*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

voor numerieke integratie af.

(2pt)

ZOZ

- c Onder aanname dat $f \in C^2(x_i, x_{i+1})$, kan men bewijzen dat de fout voor lineaire interpolatie gegeven wordt door

$$f(x) - L(x) = \frac{1}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})f''(\zeta), \text{ voor zekere } \zeta \in (x_i, x_{i+1}),$$

met $L(x)$ als in onderdeel 2a. Neem aan dat er een $M > 0$ bestaat waarvoor $|f''(x)| \leq M$ op (x_i, x_{i+1}) . *Bewijs dat*

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(f(x_i) + f(x_{i+1})) \right| \leq \alpha M (x_i - x_{i+1})^3,$$

en bepaal de waarde van α . (2pt)

- d We beschouwen numerieke integratie over een interval $[a, b]$, met steunpunten $x_i = a + i h$, $h = x_{i+1} - x_i$, en laat $x_n = b$.

i Leid de herhaalde (repeterende) Trapeziumregel af. (2pt)

ii Laat $|f''(x)| \leq \hat{M}$ op (a, b) , bewijs dat

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_T \right| \leq \alpha (b - a) \hat{M} h^2,$$

waarin I_T de herhaalde Trapeziumregel uit onderdeel 2di is (er mag met algemene α gerekend worden). (2pt)

- 3 We lossen de ééndimensionale warmtevergelijking op voor $y = y(x, t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & x \in (0, 1), t > 0, \\ y(0, t) = 0 = y(1, t), & t > 0, \\ y(x, 0) = y_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (1)$$

- a We discretiseren bovenstaande vergelijking met eindige differenties, met equidistante steunpunten $x_i = i\Delta x$, met $x_{n+1} = 1$. *Laat zien dat de eindige differentie benadering van de oplossing van dit warmte-probleem gegeven wordt door het stelsel*

$$\mathbf{w}' = A\mathbf{w},$$

waarin $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t)]^T$ de vector voorstelt $w_i(t) \approx y_i = y(x_i, t)$. *Geef de kentallen (Engels: entries) van de matrix A.* (2pt)

- b Gebruik de Stelling van Gershgorin om de grenzen van de eigenwaarden van de matrix A te schatten. (2pt)

In onderdelen 3c en 3e mag u aannemen dat de eigenwaarden van A reëel zijn en in het interval $[-\frac{4}{\Delta x^2}, 0]$ liggen, oftewel $\lambda(A) \subset [-\frac{4}{\Delta x^2}, 0]$.

- c Stel dat men de voorwaartse methode van Euler, gegeven door

$$w_{n+1} = w_n + \Delta t f(t_n, w_n),$$

(in geval van de differentiaalvergelijking $y' = f(t, y)$) gebruikt. *Leid de stabiliteitsvoorwaarde voor de maximale tijdsstap Δt , uitgedrukt in Δx af.* (2pt)

- d *Bewijs dat de locale afbreekfout van de voorwaartse methode van Euler van de orde $\mathcal{O}(\Delta t)$ is (dit moet voor algemene, gladde functie $f(t, y)$ bewezen worden).* (2pt)

- e *Is de voorwaartse methode van Euler consistent en voor welke waarden van de tijdstap Δt is de numerieke tijdsintegratie met de voorwaartse methode van Euler van het stelsel $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ convergent? Motiveer het antwoord.* (2pt)