

Faculty of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science
Numerieke Methoden I, TW2060, BSc Technische Wiskunde
Examen, 29 juni 2018, 13:30 - 16:30

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Round}(\frac{\Sigma}{3})}{2}, \quad \text{waarin } \Sigma = \text{som over alle onderdelen.}$$

NB. Dit tentamen bestaat uit twee bladzijden!

- 1 We beschouwen het volgende beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$ voor $t > 0$ met beginwaarde $y(0) = 0$.

- a We integreren het beginwaardeprobleem met de voorwaartse methode van Euler, gegeven door

$$w_{n+1} = w_n + \Delta t f(t_n, w_n),$$

met tijdstap Δt . *Laat zien dat de locale afbreekfout van de orde $\mathcal{O}(\Delta t)$ is.* (dit moet voor algemene, gladde $f(t, y)$ bewezen worden) (2pt)

- b We passen de voorwaartse methode van Euler toe op het beginwaardestelsel

$$\begin{cases} y'_1 = -2y_1 + \alpha y_2, \\ y'_2 = -\alpha y_1 - 2y_2, \end{cases} \quad (1)$$

met een beginvoorwaarde en waarin $\alpha \in \mathbb{R}$. *Leid het stabiliteitscriterium af voor de voorwaartse methode van Euler uitgedrukt in α .* (2pt)

- c *Leg uit of en wanneer de voorwaartse methode van Euler consistent en convergent is wanneer deze toegepast wordt op het beginwaardeprobleem (1) uit onderdeel 1b.* (2pt)

- d *Leid de stabiliteitsvoorwaarde af wanneer de Trapezium Regel, gegeven door*

$$w_{n+1} = w_n + \frac{\Delta t}{2} (f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1})),$$

toegepast wordt op het beginwaardeprobleem uit onderdeel 1b. (2pt)

- e *Gebruik de testvergelijking om te bewijzen dat de locale afbreekfout, wanneer de Trapezium-regel toegepast wordt, van de orde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ is.* (2pt)

- 2 We beschouwen het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} -y'' + y = f(x) = x^2 - 2, & \text{voor } x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y(1) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

- a *Laat zien dat $y(x) = x^2$ voldoet aan dit randwaardeprobleem (u hoeft niet te bewijzen dat dit de enige oplossing is).* (1pt)

- b We gebruiken de eindige differentiemethode om de oplossing van dit randwaardeprobleem te benaderen. We gebruiken een mesh met steunpunten $x_j = j\Delta x$, waarin $x_{n+1} = 1$. *Leid voor algemene n het lineaire stelsel vergelijkingen af. Schrijf het stelsel in de vorm $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ (waarin $\mathbf{w}$ de benadering voorstelt), geef de kentallen van A en van $\mathbf{b}$.* (2pt)

- c i *Leid af dat de locale afbreekfout $\varepsilon = A\mathbf{y} - \mathbf{b}$, voor algemene voldoende gladde functie $f(x)$ als rechterlid van randwaardeprobleem (2), van orde $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ is.* (2pt)

- ii *Wat wordt de locale afbreekfout voor onze huidige keuze van $f(x) = x^2 - 2$? Motiveer het antwoord.* (1pt)

- d Gebruik de stelling van Gershgorin om een bovengrens en een ondergrens van de eigenwaarden van de matrix A te verkrijgen. (2pt)
- e Motiveer waarom de hier gebruikte discretisatie stabiel (dwz A is inverteerbaar en er is een $M > 0$, die niet afhangt van Δx , waarvoor $\|A^{-1}\|_2 \leq M$ voor $\Delta x \rightarrow 0$) is. Motiveer verder waarom de discretisatie convergent is (dwz $\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|_2 \rightarrow 0$ als $\Delta x \rightarrow 0$). (2pt)

3 We lossen het volgende probleem op voor $p > 0$:

$$\text{Los op voor } p > 0: f(p) = p^2 - 3 = 0. \quad (3)$$

- a Eerst gebruiken we de vaste puntmethode van Picard waarin we p_n door herhaalde iteratie bepalen uit

$$p_{n+1} = p_n - \frac{1}{9}(p_n^2 - 3) = g(p_n). \quad (4)$$

- i Neem $p_0 = 1$ als beginschatting. Bereken p_1 en p_2 . (1pt)
- ii Bewijs dat de functie $g(x)$ precies één vast punt heeft op het interval $[1, 3]$. (2pt)
- iii Bewijs dat wanneer we $p_0 \in [1, 3]$ kiezen dat de vastepuntmethode gedefinieerd door vergelijking (4) convergeert naar het vaste punt. (2pt)
- b Vervolgens gaan we verder met de Newton-Raphson methode voor $f(p) = 0$; deze luidt als volgt:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}. \quad (5)$$

Leid deze methode af. (2pt)

- c Laat zien dat deze methode toegepast op $f(x) = x^2 - 3$ het volgende vastepuntsprobleem levert

$$p_{n+1} = \frac{p_n^2 + 3}{2p_n}. \quad (6)$$

- d Neem $p_0 = 1$ als beginwaarde. Bereken p_1 en p_2 . (1pt)