Mekelweg 4, 2628 CD DELFT

tentamen Analyse (deel 2) – wi 1 005 In, dl. 2 / wi 1 520 In

deel 2

25 januari 2006, 09.00–11.00 uur

Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.

Het ***formuleblad*** *van het instellingspakket en een* ***rekenmachine*** *mogen worden gebruikt.*
Onderling contact, communicatieapparatuur, boeken en aantekeningen zijn ***niet*** *toegestaan.*

Elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie te worden voorzien.
Tenzij anders gevraagd worden exacte antwoorden verlangd.

Let op: vul de juiste code in waaronder je resultaten moeten worden geregistreerd —

wi 1 005 In, dl. 2 voor studenten in het nieuwe Informatica-curriculum,
wi 1 005 THEt, dl. 2 voor studenten in de Elektrotechniek-schakelklas, en 6
wi 1 520 In voor studenten in het oude Informatica-curriculum.

1. Bereken met de regel van De l'Hospital of met behulp van machtreeksen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \,.$$ 6

2. a) Gegeven is een *rij* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ met $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. 4
   Is deze rij stijgend? Of misschien dalend? Ga na.

   b) Wanneer noemt men een rij convergent? Toon aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 4

   c) Bekijk nu de *reeks* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.
   Ga na of deze reeks convergent, dan wel divergent is. 8
   Aanwijzing: gebruik een vergelijkingskenmerk (*comparison test*).

3. Is de volgende reeks absoluut of relatief (*conditionally*) convergent, of divergent?

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{\sqrt[4]{n^3+8n^2+6}} \,.$$ 8

4. a) Bepaal een machtreeks van de vorm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ voor $\cos(2x^3)$. 8

   b) Geef de convergentiestraal van de machtreeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2\, 5^n}$. 4

5. Op het domein $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ is een functie $f : D \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) = y \ln x \,.$$ 6

   Bereken $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

6. Bereken $\displaystyle\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}A$ als $R = [-1,1] \times [0,1]$. 6

<u>Normering</u>

Elk onderdeel levert maximaal het aantal in de kantlijn vermelde punten op.
Als t het aantal toegekende punten is, en q het resultaat van de quizzen voor deel 2
($6 \le t \le 60$ *en* $0 \le q \le 10$), *is het cijfer* $c = \max\{\frac{t}{6}, \frac{t+4q}{10}\}$ ($c \in \mathbb{N}$, $1 \le c \le 10$).

1. **met de regel van De l'Hospital:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\ \left[\tfrac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hos}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\ \left[\tfrac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hos}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = -\tfrac{1}{2}\,;$$ 6

met reeksontwikkelen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^2}{2}+\cdots)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-\tfrac{1}{2}+\cdots\right) = -\tfrac{1}{2}\,.$$

2. a) **door differentiëren:** we bestuderen de functie $a:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ met $a(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Met de quotiëntregel: $\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{1-\frac{1}{2}\ln x}{x\sqrt{x}}\,.$

De noemer is altijd positief; de teller verandert van teken waar

$$a'(x)=0 \iff 1-\tfrac{1}{2}\ln x = 0 \iff \ln x = 2 \iff x = \mathrm{e}^2\,.$$ 4

De functie a stijgt tot $x=\mathrm{e}^2\approx 7{,}39$ en daalt daarna, en daar $a_n=a(x)$ geldt dit ook voor de rij: die stijgt voor $n\le 7$ en daalt voor $n\ge 8$.

proefondervindelijk: door proberen vinden we bijvoorbeeld $a_1=0$, $a_5\approx 0{,}72$ en $a_{15}\approx 0{,}70$; in plaats van dat laatste is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ goed bruikbaar. Duidelijk blijkt dat de rij noch stijgend noch dalend is.

b) Een rij heet convergent als $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat (in eigenlijke zin, dus eindig). 4

Volgens formule (5) van het formuleblad is $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x}{x^p}=0 \quad (p>0)$; laat $p=\frac{1}{2}>0$.

c) Gebruik het het majorante-/minorantekenmerk (vergelijkingskenmerk):

- vanaf $n=3>\mathrm{e}$ geldt dat $\ln n>1$, dus op den duur is $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$; 8
- bekend is dat $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent is ($p=\frac{1}{2}$); hieruit volgt:
- de gegeven reeks is divergent.

3. **absolute convergentie:** gebruik het limietkenmerk. Merk eerst op dat de noemer zich voor grote n gedraagt als $\sqrt[4]{n^3}$[1]. We vergelijken de reeks daarom met $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$[2]:

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{\sqrt[4]{n^3+8n^2+6}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[4]{n^3+8n^2+6}} = 5\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{n^3}{n^3+8n^2+6}} =$$
  $$5\sqrt[4]{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{8}{n}+\frac{6}{n^3}}} = 5\sqrt[4]{\frac{1}{1+0+0}} = 5\,,\text{ terwijl}$$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ divergent is ($p=\frac{3}{4}<1$); hieruit volgt:
- de reeks van absolute waarden van de gegeven reeks is divergent.

We weten nu dat de gegeven reeks *niet absoluut convergent* is. 8

relatieve convergentie: gebruik het kenmerk van Leibniz:

- de breuk is altijd positief, dus maakt de $(-1)^n$ de reeks *alternerend*;

[1]de andere termen onder het wortelteken zijn verhoudingsgewijs onbelangrijk
[2]we moeten de sommatie in 1 laten beginnen

- $\frac{5}{\sqrt[4]{(n+1)^3+8(n+1)^2+6}} < \frac{5}{\sqrt[4]{n^3+8n^2+6}}$ voor alle n, dus is de reeks van absolute waarden *dalend*; en
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt[4]{n^3+8n^2+6}} = \frac{5}{\infty} = 0$; hieruit volgt:
- de gegeven reeks is convergent.

De conclusie luidt dat de gegeven reeks *relatief convergent* is.

4. a) We vullen $y = 2x^3$ in in de Maclaurin-reeks van $\cos y$:

$$\cos(2x^3) = \cos y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x^3)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \frac{x^{6n}}{(2n)!}\,.$$ 8

Opmerking: rechtstreekse berekening is veel werk en leidt niet tot een uitdrukking voor de algemene term van de machtreeks.

b) We gebruiken het verhoudingskenmerk van d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2\,5^{n+1}}}{(-1)^n \frac{x^n}{n^2\,5^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{5^n}{5^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| =$$ 4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot |x| = \frac{|x|}{5} = 1 \text{ als } |x| = 5 \Longrightarrow \text{ de convergentiestraal is } 5.$$

5. $f(x,y) = y \ln x \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{y}{x} \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cdot \dfrac{-1}{x^2} = -\dfrac{y}{x^2}$ en $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot \ln x = \ln x\,.$ 6

6. $R = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1 \text{ en } 0 \le y \le 1\}$ en dus is

$$\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left((1+x^2) \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$\int_{-1}^{1} \Big((1+x^2) \cdot [\arctan y]_0^1 \Big)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1+x^2) \cdot \tfrac{\pi}{4}\,\mathrm{d}x = \tfrac{\pi}{4}\left[x + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \tfrac{\pi}{4} \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}\pi\,.$$ 6

[of:] $$\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \left(\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \text{ met verwisselde integratievolgorde.}$$