Deeltentamen Lineaire Algebra WI1105IN
29 juni 2010, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$

Beantwoord de volgende vragen *zonder* de matrix A expliciet uit te rekenen!

a. Bereken de eigenwaarden van A en geef een basis voor elk van de eigenruimten.

b. Ga na of de vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van A.

c. Bereken het karakteristieke polynoom van A.

2. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis voor $\mathbb{R}^2$. Voor de *lineaire* afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is gegeven dat $T(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_2$ en $T(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$.

a. Geef de matrix van T ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.

b. Geef de matrix van T ten opzichte van de basis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

3. Geef van de volgende twee beweringen aan of ze waar of onwaar zijn (uiteraard met een duidelijk argument).

a. Als Q_1 en Q_2 orthogonale matrices zijn, dan is $Q_1 Q_2$ ook een orthogonale matrix.

b. Als A een (reële) 4×4 matrix is met eigenwaarden $1, -2, 3$ en -3, dan zal de powermethode hetzij convergeren naar een eigenvector bij $\lambda = 3$ hetzij naar een eigenvector bij $\lambda = -3$. In het antwoord moet je ieder geval aangeven hoe de powermethode werkt.

4. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ en de vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

a. Geef een orthogonale basis voor de kolomruimte van A.

b. Geef een basis voor het orthogonale complement van $\operatorname{Col} A$.

c. Bereken de orthogonale projectie van de vector $\mathbf{b}$ op $\operatorname{Col} A$.

d. Bereken de kleinste-kwadratenoplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

5. Gegeven zijn de (stochastische) matrix P, de vector $\mathbf{v}$ en de kansvector $\mathbf{s}$ door

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a. Leid af dat het karakteristieke polynoom van P gelijk is aan $\lambda^4 - \lambda^2$.

b. Toon aan dat het Markov proces gedefinieerd door $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$ een **unieke** steady state $\mathbf{q}$ heeft, en bereken $\mathbf{q}$. (Hint: $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, voor de vooraf gegeven vector $\mathbf{v}$.)

c. Ga na of het zojuist gedefinieerde Markov proces uitgaande van de beginsituatie $\mathbf{s}$ convergeert naar de steady state.

d. Convergeert het Markov proces vanaf elke beginverdeling naar $\mathbf{q}$?