Deeltentamen Lineaire Algebra WI1105IN
29 juni 2010, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$

Beantwoord de volgende vragen *zonder* de matrix A expliciet uit te rekenen!

a. Bereken de eigenwaarden van A en geef een basis voor elk van de eigenruimten.

b. Ga na of de vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van A.

c. Bereken het karakteristieke polynoom van A.

2. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis voor $\mathbb{R}^2$. Voor de *lineaire* afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is gegeven dat $T(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_2$ en $T(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$.

a. Geef de matrix van T ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.

b. Geef de matrix van T ten opzichte van de basis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

3. Geef van de volgende twee beweringen aan of ze waar of onwaar zijn (uiteraard met een duidelijk argument).

a. Als Q_1 en Q_2 orthogonale matrices zijn, dan is $Q_1 Q_2$ ook een orthogonale matrix.

b. Als A een (reële) 4×4 matrix is met eigenwaarden $1, -2, 3$ en -3, dan zal de powermethode hetzij convergeren naar een eigenvector bij $\lambda = 3$ hetzij naar een eigenvector bij $\lambda = -3$. In het antwoord moet je ieder geval aangeven hoe de powermethode werkt.

4. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ en de vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

a. Geef een orthogonale basis voor de kolomruimte van A.

b. Geef een basis voor het orthogonale complement van $\operatorname{Col} A$.

c. Bereken de orthogonale projectie van de vector $\mathbf{b}$ op $\operatorname{Col} A$.

d. Bereken de kleinste-kwadratenoplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

5. Gegeven zijn de (stochastische) matrix P, de vector $\mathbf{v}$ en de kansvector $\mathbf{s}$ door

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a. Leid af dat het karakteristieke polynoom van P gelijk is aan $\lambda^4 - \lambda^2$.

b. Toon aan dat het Markov proces gedefinieerd door $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$ een **unieke** steady state $\mathbf{q}$ heeft, en bereken $\mathbf{q}$. (Hint: $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, voor de vooraf gegeven vector $\mathbf{v}$.)

c. Ga na of het zojuist gedefinieerde Markov proces uitgaande van de beginsituatie $\mathbf{s}$ convergeert naar de steady state.

d. Convergeert het Markov proces vanaf elke beginverdeling naar $\mathbf{q}$?

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1a Een binnenkomer! Als $A = PDP^{-1}$, dan zijn de diagonaalelementen van D de eigenwaarden van A, en de kolommen $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ van P de bijbehorende eigenvectoren (van A).

1b Aangezien $\mathbf{y} \neq \mathbf{p}_1$ en $\mathbf{y} \neq \mathbf{p}_2$, kan $\mathbf{y}$ alleen een eigenvector van A zijn als $\mathbf{y}$ een lineaire combinatie is van $\mathbf{p}_3$ en $\mathbf{p}_4$, een basis voor eigenruimte bij $\lambda = 3$. Dit is evident <u>*niet*</u> het geval.

1c Het karakteristieke polynoom van A is gelijk aan het karakteristieke polynoom van D, en dat is nogal simpel: $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$.

2a $[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $[T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,
dus $[\,T\,]_{\mathcal{B}} = \Big[[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} \;\; [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} \Big] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

2b $[\,T\,]_{\mathcal{E}} = \Big[[T(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}} \quad [T(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{E}} \Big] = \Big[T(\mathbf{e}_1) \;\; T(\mathbf{e}_2) \Big]$.
Als volgt:

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1 \implies T(\mathbf{e}_2) = T(\mathbf{b}_2) - T(\mathbf{b}_1) = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) - 2\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

en analoog

$$\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 \implies T(\mathbf{e}_1) = 2T(\mathbf{b}_1) - T(\mathbf{b}_2) = 2 \cdot 2\mathbf{b}_2 - (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) = \ldots = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Dus de gevraagde matrix wordt: $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$

3a Dit is WAAR.
Gegeven is: $Q_1^T Q_1 = Q_1 Q_1^T = I$ en net zo voor Q_2.
Na te gaan: dit geldt ook voor het product $R = Q_1 Q_2$. Dat is niet zo moeilijk:

$$R^T R = (Q_1 Q_2)^T (Q_1 Q_2) = Q_2^T Q_1^T Q_1 Q_2 = Q_2^T (Q_1^T Q_1) Q_2 = Q_2^T I Q_2 = Q_2^T Q_2 = I$$

en op precies dezelfde wijze is ook $RR^T = I$. En daarmee is het klaar.

3b Dit is ONWAAR.
De matrix A heeft vier verschillende eigenwaarden dus is diagonaliseerbaar.
Een willekeurige (start)vector $\mathbf{x}_0$ is te schrijven als

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + c_4 \mathbf{v}_4$$

waarbij $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ eigenvectoren zijn bij de e.w.n 1, -2, 3 resp. -3.
Bij de powermethode wordt $\mathbf{x}_0$ herhaald vermenigvuldigd met A (en tussendoor geschaald – maar 't is niet zo erg als dat niet genoemd wordt) dus zal

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= (\sigma_k)\, A^k \mathbf{x}_0 \\
&= (\sigma_k) \cdot (c_1(1)^k \mathbf{v}_1 + c_2(-2)^k \mathbf{v}_2 + c_3 3^k \mathbf{v}_3 + c_4(-3)^k \mathbf{v}_4) \\
&= (\sigma_k) \cdot 3^k \cdot (c_1(1/3)^k \mathbf{v}_1 + c_2(-2/3)^k \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + c_4(-1)^k \mathbf{v}_4)
\end{aligned}$$

waarbij de constante σ_k het product is van alle schalingsfactoren.
De eerste twee termen vallen op den duur in het niet tegenover de laatste twee, dus $\mathbf{x}_k$ zal op den duur een lineaire combinatie zijn van $\mathbf{v}_3$ en $\mathbf{v}_4$, en dat is in het algemeen <u>*niet*</u> een eigenvector bij $\lambda = 3$, en ook niet een eigenvector bij $\lambda = -3$

4a Gram-Schmidt toepassen: $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$,

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 - \hat{\mathbf{a}_1} = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{10}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4b $\text{Dim}(\ (\text{Col}\, A)^{\perp}) = 4 - \text{Dim}\ (\text{Col}\, A) = 2$, dus nodig zijn: twee onafhankelijke vectoren in $(\text{Col}\, A)^{\perp}$, oftewel, loodrecht op $\mathbf{a}_1$ en $\mathbf{a}_2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

(in de laatste stap is de tweede rij 2/3 keer opgeteld bij de eerste rij Twee onafhankelijke oplossingen zijn eenvoudig af te lezen (x_2 en x_4 zijn 'vrij'), bijv

$$\begin{bmatrix} -5/3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Indien geveegd naar gereduceerde echelonvorm: basis wordt $\left\{ \begin{bmatrix} -7/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

4c Dit kan met de <u>*orthogonale*</u> basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, dan wordt het antwoord

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\,\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\,\mathbf{b}_2 = \frac{21}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{18}{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 \\ 6.6 \\ 2.7 \\ 2.7 \end{bmatrix}$$

of door eerst onderdeel **d.** te maken!

4d Op te lossen: $A^T A\, \hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10 & 21 \\ 10 & 22 & 39 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10 & 21 \\ 0 & 12 & 18 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right]$$

Dus $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 6/10 \\ 3/2 \end{bmatrix}$ is de kleinste kwadratenoplossing, en: $\hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3.6 \\ 6.6 \\ 2.7 \\ 2.7 \end{bmatrix}$,

en dat is dan het antwoord op vraag **c.**

5a Kwestie van nauwkeurig, liefst een beetje handig, $\text{Det}(P - \lambda I)$ uitrekenen. Handige eerste stap: tel de eerste rij bij de derde rij op en trek de tweede rij af van de vierde; handige tweede stap: derde kolom aftrekken van de eerste kolom:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.5 & -\lambda & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 & -\lambda & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.5 & -\lambda & 0.5 & 0 \\ -\lambda & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & -\lambda & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

5b $\mathbf{q}$ moet voldoen aan: $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$, $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$, en $\sum q_i = 1$. Daar $\lambda = 1$ een enkelvoudig nulpunt is van het karakteristieke polynoom — namelijk $\lambda^4 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 1) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ — , is er maar één onafhankelijke eigenvector bij $\lambda = 1$, en deze kan maar op één manier geschaald worden.

Met behulp van de hint is de steady state snel gevonden: $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$

5c

$$\mathbf{x}_1 = P\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.25 \\ 0.40 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

en vanaf $k = 2$ blijft natuurlijk $\mathbf{x}_k = \mathbf{q}$.

5d Dit is niet zonder meer duidelijk, want de matrix is niet regulier:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^4 = P^2, \ P^5 = P^3, \text{ enz}$$

dus zal P^n nooit (op elke positie tegelijk) groter dan 0 worden.

Vanuit $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ springt het proces heen en weer tussen $\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$,

en zal dus **niet** convergeren naar de steady state.