Tentamen Lineaire Algebra WI1105IN, deel 1
21 juni 2010, 09.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of Engels). Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. **a.** Bereken de algemene oplossing in vectorvorm van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & -4 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

   b. Is voor deze matrix A elk stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ consistent? Indien niet: geef een voorbeeld van een vector $\mathbf{y}$ waarvoor het stelsel strijdig is.

2. Gegeven zijn de twee matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

   a. Toon aan dat A en B rij-equivalent (Eng: row equivalent) zijn.

   b. Ga na of A en B dezelfde nulruimte hebben.

   c. Ga na of A en B dezelfde kolomruimte hebben.

3. **a.** Bereken een LU-ontbinding van de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

   b. Leid hieruit af hoe je A kunt schrijven in de vorm $A = \tilde{L}D\tilde{U}$, waarbij D een diagonaalmatrix is en $\tilde{L}$ en $\tilde{U}$ driehoeksmatrices zijn *met op de diagonaal allemaal* 1*-en.*

Z.O.Z. voor opgaven 4, 5 en 6

4. De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft matrix $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Geef om te beginnen de definitie van een surjectieve ('onto') afbeelding.

b. Ga na of T surjectief is.

c. Toon aan: de vectoren $\mathbf{v}$ waarvoor geldt $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ vormen een deelruimte van $\mathbb{R}^3$.

d. Geef een basis voor deze deelruimte.

5. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

a. Bereken de inverse van A. Geef met een stap-voor-stap berekening aan hoe je aan het antwoord komt.

b. Stel nu $B = \frac{1}{3}A^2$. Geef aan hoe je de inverse van B uit kunt berekenen *zonder B eerst expliciet uit te rekenen*,
en *bereken* vervolgens B^{-1}.

6. Voor welke a is de determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & a & 0 & 3 \\ a & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$ gelijk aan 0?