Tentamen Lineaire Algebra WI1105IN, deel 1
7 april 2010, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. Beschouw het volgende stelsel lineaire vergelijkingen met twee parameters α, β.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + \alpha x_3 - 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = \beta \end{cases}$$

a. Breng de bijbehorende aangevulde matrix in echelonvorm.

b. Geef de oplossing *in vectorvorm* van het stelsel in het geval dat $\alpha = 4$, $\beta = 6$.

c. Voor welke waarden van α en β is het stelsel strijdig?

2. Gegeven zijn

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a. De kolommen van L geven een basis voor $\mathbb{R}^4$; noem deze basis maar even $\mathcal{L}$. Bereken de coördinaatvector $[\mathbf{v}]_{\mathcal{L}}$.

b. Bereken de inverse van de matrix U.

c. Bereken de oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$, *zonder* het product LU expliciet uit te rekenen. (Tip: hoe kun je de vorige onderdelen gebruiken?)

d. Hoe kun je A^{-1} uitrekenen zonder het product LU expliciet uit te rekenen? (Alleen methode aangeven; niet uitrekenen.)

3. R is de rotatie (in $\mathbb{R}^2$) om het punt(2,1) over een hoek $-\pi/2$ (oftewel: 90^o 'met de klok mee'), en T is de lineaire afbeelding die $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ afbeeldt op zichzelf en $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ afbeeldt op $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   a. Bereken de matrix van T.

   b. Is T surjectief ('onto')?

   Geef alle vectoren die door T op de vector $\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ worden afgebeeld.

   c. Bereken de matrix die de rotatie beschrijft met betrekking tot homogene coördinaten.

4. Voor alle vragen, en voor deze vraag in het bijzonder geldt: **geef duidelijke argumenten.**

   a. Toon aan: als A en B $n \times n$ matrices zijn met onafhankelijke kolommen, dan heeft AB ook onafhankelijke kolommen.

   Is dit ook waar als de matrices niet vierkant zijn (en onafhankelijke kolommen hebben)? (Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.)

   b. Waar of onwaar:
   voor inverteerbare matrices A, B geldt $\left((AB)^T)\right)^{-1} = (A^T)^{-1}(B^T)^{-1}$.

   c. A is een n bij n matrix. Matrix $\tilde{A}$ ontstaat door de rijen in omgekeerde volgorde te nemen. (De 1ste en de n-de rij worden verwisseld, de 2de en de n-1ste, enzovoorts.) Beschrijf het verband tussen $\mathrm{Det}(A)$ en $\mathrm{Det}(\tilde{A})$.

   d. Waar of onwaar: als de stelsels $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ en $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ beide consistent zijn, en $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, dan is het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$ ook consistent.

$\mathcal{EINDE}$