

The maximum possible score is 40 points. The obtained grade is equal to $1 + \frac{9}{40} \cdot \# \text{points}$.

- You may use the lecture notes, handouts and your personal notes.
You may **not** use help from others or search the internet. The only exception: if you have any issues/questions during the exam, you may contact me at d.c.gijswijt@tudelft.nl.
- The exam ends at 10.40. After the exam you have until 11.00 to upload your work.
For each problem, upload a separate pdf to the corresponding assignment on Brightspace.
- Directly after the exam, you may be invited for a **remote check**. So please keep an eye on your TUDelft email after the exam.

Responsible examiner: Prof. Dr. D.C. Gijswijt

Good luck!

Problem 0 (verplicht!)

Om plechtig te beloven dat je bij het maken van dit open boek tentamen geen gebruik maakt van niet toegestane middelen en geen hulp van derden inroept, dien je onderstaande verklaring over te schrijven en te **ondertekenen**. Lever dit in als aparte opgave (Opgave 0).

“Ik beloof dat ik geen ongeoorloofde hulp van mensen of andere bronnen heb gebruikt bij het maken van mijn tentamen. Ik heb alle ingezonden uitwerkingen van de opgaven zelf gemaakt in het tijdsbestek dat hiervoor was toegewezen.”

Problem 1 (10 pts)

Let G be an abelian group. Show that

$$H = \{a^2 : a \in G\}$$

is a subgroup of G .

Problem 2 (10 pts)

For all $x, y \in \mathbb{R}$ we define

$$x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1.$$

Prove that $\mathbb{R}$ with the operation $\circ$ is a monoid, but not a group.

Problem 3 (10 pts)

Use the Euclidean algorithm to compute the inverse of $\overline{207}$ in the group $(\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z})^*$.

Problem 4 (10 pts)

Let $f : \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$ be the map given by

$$f(n) = A^n, \quad \text{with } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note that A^0 is defined to be the identity matrix.

2pts (a) Prove that f is a group homomorphism.

4pts (b) Determine $\text{Im}(f)$.

4pts (c) Determine $\ker(f)$.