# Tentamen Lineaire Algebra WI1105IN, deel 1
# 7 april 2010, 9.00 – 11.00 uur

---

**Toelichting:** Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

**1.** Beschouw het volgende stelsel lineaire vergelijkingen met twee parameters $\alpha$, $\beta$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + \alpha x_3 - 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = \beta \end{cases}$$

**a.** Breng de bijbehorende aangevulde matrix in echelonvorm.

**b.** Geef de oplossing *in vectorvorm* van het stelsel in het geval dat $\alpha = 4$, $\beta = 6$.

**c.** Voor welke waarden van $\alpha$ en $\beta$ is het stelsel strijdig?

**2.** Gegeven zijn

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**a.** De kolommen van $L$ geven een basis voor $\mathbb{R}^4$; noem deze basis maar even $\mathcal{L}$. Bereken de coördinaatvector $[\mathbf{v}]_{\mathcal{L}}$.

**b.** Bereken de inverse van de matrix $U$.

**c.** Bereken de oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$, *zonder* het product $LU$ expliciet uit te rekenen. (Tip: hoe kun je de vorige onderdelen gebruiken?)

**d.** Hoe kun je $A^{-1}$ uitrekenen zonder het product $LU$ expliciet uit te rekenen? (Alleen methode aangeven; niet uitrekenen.)

**3.** $R$ is de rotatie (in $\mathbb{R}^2$ ) om het punt(2,1) over een hoek $-\pi/2$ (oftewel: $90^o$ 'met de klok mee'), en $T$ is de lineaire afbeelding die $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ afbeeldt op zichzelf en $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ afbeeldt op $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

**a.** Bereken de matrix van $T$.

**b.** Is $T$ surjectief ('onto')?

Geef alle vectoren die door $T$ op de vector $\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ worden afgebeeld.

**c.** Bereken de matrix die de rotatie beschrijft met betrekking tot homogene coördinaten.

**4.** Voor alle vragen, en voor deze vraag in het bijzonder geldt: **geef duidelijke argumenten**.

**a.** Toon aan: als $A$ en $B$ $n \times n$ matrices zijn met onafhankelijke kolommen, dan heeft $AB$ ook onafhankelijke kolommen.

Is dit ook waar als de matrices niet vierkant zijn (en onafhankelijke kolommen hebben)? (Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.)

**b.** Waar of onwaar:
voor inverteerbare matrices $A$, $B$ geldt $\big((AB)^T)\big)^{-1} = (A^T)^{-1}(B^T)^{-1}$.

**c.** $A$ is een $n$ bij $n$ matrix. Matrix $\tilde{A}$ ontstaat door de rijen in omgekeerde volgorde te nemen. (De 1ste en de $n$-de rij worden verwisseld, de 2de en de $n$-1ste, enzovoorts.) Beschrijf het verband tussen Det$(A)$ en Det$(\tilde{A})$.

**d.** Waar of onwaar: als de stelsels $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ en $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ beide consistent zijn, en $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, dan is het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$ ook consistent.

*EINDE*

**ANTWOORDEN + UITWERKINGEN**

**1a**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & \alpha & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & \beta \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & \alpha & -8 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & \beta-4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & \alpha & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 2-\frac{1}{4}\alpha & 0 & \beta-3 \end{array}\right]$$

**1b** Voor de gevraagde waarden van $\alpha$ en $\beta$ wordt de echelonmatrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$x_4$ is vrije variabele en de oplossing wordt

$$\begin{cases} x_1 &= -2 + x_4 \\ x_2 &= 4 - 2x_4 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 & \text{vrij} \end{cases} \qquad \text{In vectorvorm } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**1c** Verder redeneren met de aangevulde matrix $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & \alpha & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 2-\frac{1}{4}\alpha & 0 & \beta-3 \end{array}\right]$:

Als $2 - \frac{1}{4}\alpha \neq 0$ dan heeft elke rij van de coëfficiëntenmatrix een pivot, dus is het stelsel consistent.

Als $2 - \frac{1}{4}\alpha = 0$, oftewel als $\alpha = 8$, dan zijn er twee pivots; het stelsel is strijdig precies als $\beta - 3 \neq 0$.

Antwoord: het stelsel is strijdig als $\alpha = 8,\ \beta \neq 3$.

**2a** Dit kan wel uit het hoofd:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dus } [\mathbf{v}]_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**2b** $[\,U \,|\, I\,]$ vegen tot gereduceerde echelonvorm geeft

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \text{dus} \quad U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**2c** In twee stappen: eerst $L\mathbf{y} = \mathbf{v}$, dan $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Vanwege **a.** $\mathbf{y} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, en dan (via **b.**) $\mathbf{x} = U^{-1}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

**2d** $A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$, en de inverse van de driehoeksmatrix $L$ kan nagenoeg uit het hoofd.

**3a** $A = [\,T\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**3b** $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, en $\textbf{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$, dus $T$ is surjectief.

Vectoren die op $\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ worden afgebeeld:

het ztelsel $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ oplossen geeft $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 12 \\ -7 \end{bmatrix}$.

**3c** Aanpak 1: bereken beelden van drie 'makkelijke' vectoren:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix};$$

In homogene coördinaten: de matrix $B$ moet voldoen aan

$$B \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aanpak 2: via translatie – rotatie om $\mathbf{0}$ – translatie

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**4a** Per definitie: $A$ heeft onafhankelijke kolommen precies dan als het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alleen de triviale oplossing $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft. Stel dat dit zowel voor $A$ als voor $B$ geldt. Dan geldt:

$$\begin{aligned} (AB)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad A \cdot B\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \quad B\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \text{(want } A \text{ heeft onafhankelijke kolommen)} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \ \text{(want } B \text{ heeft onafhankelijke kolommen)} \end{aligned}$$

Voor vierkante $A$ en $B$ volgt het uit een van de beweringen van de stelling over de inverse: als $A$ en $B$ onafhankelijke kolommen hebben, dan zijn $A$ en $B$ inverteerbaar, dan is $AB$ inverteerbaar (namelijk $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$), dus dan heeft $AB$ onafhankelijke kolommen.

**4b** Dat dit **waar** is volgt uit de regels $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ en $(AB)^T = B^T A^T$:

$$\big((AB)^T)\big)^{-1} = \big(B^T A^T\big)^{-1} = (A^T)^{-1}(B^T)^{-1}.$$

**4c** Elke rijverwisseling geeft aan de determinant een min-teken.
Is het aantal rijwisselingen even, dan geldt $\mathrm{Det}(A)$ en $\mathrm{Det}(\tilde{A})$.
Dit is het geval als $n = 4$, 5, 8, 9, 12, 13, enz (en eigenlijk ook: als $n = 1$).
Voor de andere waarden van $n$ zal gelden $\mathrm{Det}(A) = -\mathrm{Det}(\tilde{A})$

**4d** Stel dat de eerste twee stelsels consistent zijn, met oplossingen $\mathbf{x}_1$ resp. $\mathbf{x}_2$, dus $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ en $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$; dan is $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3$, dus het derde stelsel is eveneens consistent. Dus de bewering is **waar**.