Deeltentamen Lineaire Algebra WI1105IN
24 augustus 2009, 9.00 − 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Ga na dat $\lambda = -1$ een eigenwaarde is van A.

b. Ga na dat $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van A.

c. Ga na of A diagonaliseerbaar is.

2. **a.** Bereken met de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis voor de deelruimte S van $\mathbb{R}^4$ voortgebracht door de vectoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

b. Geef een methode om een basis voor het orthogonale complement van S te berekenen, en bereken zo'n basis. (N.B. deze vraag kun je onafhankelijk van onderdeel **a.** beantwoorden.)

c. Bereken de orthogonale projectie van de vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ op S.

Z.O.Z. voor de volgende opgaven

3. A is een 3×3 matrix, en de afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Gegeven is dat $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ eigenvectoren van A zijn bij de eigenwaarden $\frac{1}{2}$, 1 resp. -1.

a. Bereken $[T]_{\mathcal{B}}$, waarbij $\mathcal{B}$ de basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is.

b. Toon *zonder A te berekenen* aan waarom A symmetrisch moet zijn.

Laat nu $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

c. Bereken $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

d. Bereken, voor zover deze limiet bestaat, $\lim_{k \to \infty} A^k\mathbf{x}$.

4. Geef bij elk van de volgende beweringen een bewijs in geval van juistheid en een tegenvoorbeeld of ander duidelijk argument in geval van onjuistheid.

a. Als een $n \times n$ matrix A diagonaliseerbaar is, dan is $A + 2I$ eveneens diagonaliseerbaar.

b. De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

met $b \neq 0$ is een rotatie.

c. Als de twee $n \times n$ matrices A en B allebei positief definiet zijn, dan is de matrix $A + B$ eveneens positief definiet .