

Test 3 Mathematical Structures AM1010
Friday January 22 2021, 13:45-14:35



- This is an open book exam: You can consult any written materials that you have; you are not allowed to consult electronic documents or use communication devices.
- All answers have to be provided with a proof unless otherwise specified.
- You cannot discuss the questions with anyone before Thursday January 28.
- You can give your answers in English or in Dutch.
- After the exam you should upload your solutions on Brightspace. We expect a single file per problem, so it is easiest if you can keep one problem on one sheet of paper. (Problems with support should be kept together in one file.)
- The grade is $(\text{score}+4)/4$.

-
- Dit is een openboektentamen: Je mag elke schriftelijke bron raadplegen die je hebt, je mag niet elektronische documenten gebruiken of gebruik maken van communicatie-apparaten.
 - Alle antwoorden moeten met uitleg/bewijs gegeven te worden, tenzij anders opgeschreven.
 - Je mag de vragen met niemand bespreken voor donderdag 28 januari.
 - De vragen kunnen beantwoord worden in het Nederlands of het Engels.
 - Na het tentamen moet je je antwoord in Brightspace uploaden. We verwachten een los bestand per opgave, dus het is het makkelijkste als elke opgave op 1 blaadje staat. (Opgaven met deel-onderdelen moeten in 1 bestand geupload worden.)
 - Het cijfer is $(\text{score}+4)/4$.

Questions during exam or uploading? Vragen tijdens tentamen of uploaden?
f.j.vandebult@tudelft.nl

- | | | |
|---|--|---|
| 0 | (a) Copy the following sentence on your paper | 0 |
| | I declare that I have made this examination on my own, with no assistance, and in accordance with the TU Delft policies on plagiarism, cheating, and fraud. | |
| | Schrijf de volgende zin over | |
| | Ik verklaar dat ik dit tentamen zelf gemaakt heb, zonder hulp van derden, en in overeenstemming met de TU Delft richtlijnen ten aanzien van fraude en plagiaat. | |
| | (b) Give the times at which you will <u>not</u> be available for a possible oral check on Monday January 25 through Wednesday January 27 between 9am and 6pm. | 0 |
| | Schrijf de tijden op waarop je <u>niet</u> beschikbaar bent voor een mogelijke mondelinge controle van maandag 25 januari tot en met woensdag 27 januari tussen 9:00 en 18:00. | |

Do not forget problem 0 on the first page!
Vergeet opgave 0 op de eerste pagina niet!

- 1 Determine whether the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2+n^2}{n^2}$ converges or diverges. If it converges determine whether it converges absolutely or conditionally. 6

Bepaal of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2+n^2}{n^2}$ convergeert of divergeert. Als de reeks convergeert bepaal of deze convergentie absoluut of relatief is.

- 2 Determine the radius of convergence and the endpoints of the interval of convergence of $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{n+1}$. 6

You do not have to determine whether the series converges or diverges at the endpoints of the interval of convergence.

Bepaal de convergentiestraal en de eindpunten van het convergentie-interval van $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{n+1}$.

Je hoeft niet te bepalen of de reeks convergeert of divergeert op de eindpunten van het convergentie-interval.

- 3 Consider the axioms of the real numbers as an ordered field on pages 113 and 114 of the book. They are also given on the next page. 8

Beschouw de axioma's van de reële getallen als een geordend lichaam op pagina's 113 en 114 van het boek. Ze staan ook opgeschreven op de volgende pagina.

Show using these axioms that if $y + x < z$ and $z + y < x$, then $((y + x) + y) + (-x) < 0$. For each step indicate which axiom you use.

Laat met behulp van deze axiomas zien dat als $y + x < z$ en $z + y < x$, dan ook $((y + x) + y) + (-x) < 0$. Geef voor elke stap aan welk axioma je gebruikt.

- 4 Give an example of bounded sequences (s_n) and (t_n) for which the inequality below holds. Prove your example works by giving the values of all the $\limsup$'s that appear (no argument is necessary). 6

Geef een voorbeeld van begrensde rijtjes (s_n) en (t_n) zodat de ongelijkheid hieronder geldt. Bewijs dat je voorbeeld correct is door de uitkomsten te geven van alle $\limsup$'s die voorkomen (je hoeft deze resultaten niet toe te lichten).

$$\limsup s_n t_n > (\limsup s_n)(\limsup t_n).$$

- 5 (a) Suppose $\sum a_n$ converges and (a_n) is decreasing. Show that $\sum a_{2n}$ also converges. 7

Stel $\sum a_n$ convergeert, en (a_n) is een dalende rij. Laat zien dat $\sum a_{2n}$ ook convergeert.

- (b) Give an example of a convergent series $\sum a_n$ for which $\sum a_{2n}$ diverges. Prove your claims! 3

Geef een voorbeeld van een convergente reeks $\sum a_n$, waarvoor $\sum a_{2n}$ divergeert. Bewijs je uitspraken!

The axioms of an ordered field as applied to $\mathbb{R}$ are:

De axioma's van een geordend lichaam toegepast op $\mathbb{R}$ zijn:

A1 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y \in \mathbb{R}$ and $x = w \wedge y = z \Rightarrow x + y = w + z$;

A2 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$;

A3 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$;

A4 $\exists 0 : \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$ and this 0 is unique;

A5 $\forall x \in \mathbb{R} : \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$ and $(-x)$ is unique;

M1 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y \in \mathbb{R}$ and $x = w \wedge y = z \Rightarrow x \cdot y = w \cdot z$;

M2 $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$;

M3 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

M4 $\exists 1 \neq 0 : \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$ and this 1 is unique;

M5 $\forall x \neq 0 : \exists (1/x) \in \mathbb{R} : x \cdot (1/x) = 1$ and $(1/x)$ is unique;

DL $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;

O1 For all $x, y \in \mathbb{R}$ exactly one of $x = y$, $x > y$, holds $x < y$;

Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ precies n van $x = y$, $x > y$ en $x < y$ geldt;

O2 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$;

O3 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow x + z < y + z$;

O4 $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \wedge 0 < z \Rightarrow xz < yz$.

Woordenlijst voor vertaling uit Engels:

Engels	Nederlands
and	en
this	deze
is unique	is uniek