Deeltentamen Lineaire Algebra WI1105IN
3 juli 2009, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. Bereken de (reële) eigenwaarden van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ en ga na of A diagonaliseerbaar is. N.B. vermijd *onnodig* rekenwerk.)

2. Beschouw de Markov keten $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$ met kansmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Bereken de 'steady state' kansvector $\mathbf{q}$, corresponderend met de evenwichtstoestand.

3. Gegeven zijn de volgende vier vectoren in $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a. Bereken de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op $W = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

b. Bereken een orthogonale basis voor W en ook voor $W^\perp$.

4. **a.** Geef de matrix A van de kwadratische vorm

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_3.$$

b. Ga na of de kwadratische vorm postief (semi)definiet, negatief (semi)definiet of indefiniet is. (Een kwadr. vorm is positief semidefiniet als $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ voor elke $\mathbf{x}$, en er een $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ is waarvoor $Q(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.)

Z.O.Z. voor de laatste opgave

5. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

a. Laat zien dat het karakteristieke polynoom van A gegeven wordt door

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$$

b. Toon aan dat $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ een (complexe) eigenvector is van A.

c. Geef voor elke (reële en complexe) eigenwaarde een (reële dan wel complexe) eigenvector.

d. Bepaal de eigenwaarden van A^2 en gebruik dit om A^{100} te berekenen.