

Tentamen Gewone differentiaalvergelijkingen, TW2030

Woensdag 14 maart 2018, 13.30-16.30 u

- Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
 - Alle antwoorden dienen beargumenteerd te worden.
 - Normering: 41 punten zijn in totaal te behalen; de puntenverdeling is zoals aangegeven in de opgaven. Het tentamencijfer is (aantal punten+4)/4.5
 - *Succes !*
-

1. Beschouw het beginwaardeprobleem voor de functie $y = y(x)$:

$$xy'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \quad (1)$$

- a. (1) Geef de singuliere punten van deze vergelijking en geef aan of het een regulier dan wel irregulier singulier punt betreft.
- b. (2) Geef de indicatiële- of indexvergelijking en laat zien dat $r = 0$ een oplossing is van deze vergelijking; wat is de andere oplossing?
- c. (2) Zoek een oplossing van de vorm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ door de recurrente betrekking voor a_n op te stellen en geef aan voor welke n de betrekking geldig is.
- d. (2) Los de onder (c) gevonden recurrente betrekking op en geef de oplossing van het beginwaardeprobleem.

2. Beschouw het beginwaardeprobleem voor de functie $y = y(t)$:

$$ty'' - ty' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \quad (2)$$

- a.(2) Bereken de Laplace getransformeerde van bovenstaande tweede-orde differentiaalvergelijking en laat zien dat dit leidt tot een vergelijking die zowel Laplace getransformeerde van $y(t)$, $\hat{y}(s) = L[y(t)]$, als de afgeleide $\frac{d}{ds}\hat{y}(s)$ bevat.
- b.(3) Los de differentiaalvergelijking voor $\hat{y}(s)$ uit (a) op en bepaal vervolgens de oplossing $y(t)$.

3. We bekijken de volgende matrixdifferentiaalvergelijking voor de functie $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$:

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x},$$

met matrix A gedefinieerd door

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a. (6) Bereken e^{At} en geef de oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}$ met $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.
- b. (3) Bepaal een particuliere oplossing van het inhomogene probleem

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \cos(t).$$

4. Gegeven is de volgende stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - xy \\ \dot{y} &= x + x^2 \end{cases} \quad (3)$$

- a. (2) Bereken alle evenwichtspunten.
- b. (2) Karakteriseer de evenwichtspunten en bepaal (indien mogelijk) de stabiliteit (asymptotisch stabiel, stabiel, instabiel) van het gelineariseerde systeem voor de evenwichtspunten.
- c. (2) Bepaal (indien mogelijk) de stabiliteit van de evenwichtspunten voor het *niet-lineaire* stelsel en beargumenteer je antwoord.
- d. (3) Laat zien dat het stelsel (3) in poolcoördinaten ($x(t) = r(t) \cos \theta(t)$, $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$) transformeert tot:

$$\begin{cases} \dot{r} &= 0 \\ \dot{\theta} &= 1 + r \cos \theta \end{cases} \quad (4)$$

- e. (3) Gebruik (d) om te laten zien dat er oneindig veel periodieke oplossingen in het gebied $G = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ liggen.
- f. (3) Schets het faseportret. Teken hierin zowel de periodieke oplossingen als de evenwichtspunten en geef de richting van de oplossing aan.

5. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking voor $y(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^{y^2-1}}{1-t^2y^2}, \quad (5)$$

met beginvoorwaarde $y(1) = 2$.

- a. (1) Geef de existentie- en eenduidigheidstelling.
- b. (4) Bepaal een gebied $R = [1 - a, 1 + a] \times [2 - b, 2 + b]$ waarop differentiaalvergelijking (5) met beginwaarde $y(1) = 2$ een unieke oplossing heeft. Bewijs existentie- en eenduidigheid van een continu differentieerbare oplossing door gebruik te maken van de existentie- en eenduidigheidstelling.