1. $xy'' - xy' - y = 0$ (1)

a) $x=0$ singulier punt
regulier want in de standaard vorm $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

is $p(x) = -1$
en $q(x) = -\frac{1}{x}$, dus $xp(x) = -x$ is analytisch
en $x^2 q(x) = -x$ is ook analytisch
daarom regulier singulier punt

b) De indiciele vergelijking: $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

$x\,p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots$
$x^2 q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots$
$\Big\}\ p_0 = q_0 = 0$

dus $r(r-1) = 0$ is de indiciele vergelijking
met $r=0$ en $r=1$ als oplossing.

c) Invullen van $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in (1) geeft:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1) x^n = 0$$

Schuif index $n \to n+1$ in eerste som

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) n\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1) x^n = 0$$

Hieruit vinden we

$a_{n+1}(n+1)n = a_n(n+1)$ voor $n = 0, 1, 2 \dots$
dus $a_0 = 0$ $a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$ $n = 1, 2, 3 \dots$
en a_1 onbepaald.

1d) De recursieve betrekking $a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$ $n = 1, 2, 3$

kunnen je makkelijk oplossen

$$a_2 = \frac{a_1}{1} \quad ; \quad a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_1}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{3} = \frac{a_1}{3.2}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_1}{n!}$$

Dus: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (want $a_0 = 0$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = x a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_1 x e^x.$$

is een oplossing van de DV.

Deze oplossing voldoet aan de begin vw

$y(0) = 0$ en $y'(0) = a_1 e^x + a_1 x e^x \Big|_{x=0} = a_1 = 2$

als $a_1 = 2$

Wegens uniciteit van het beginwaarde probleem

is de oplossing $y(x) = 2xe^x$

Opm: Als je met Frobenius theorie werkt dan geeft dit 2 opl 1 voor $r = 0$ en 1 voor $r = 1$

de coefficient van de opl met $r = 0$ is dan 0, want $y(0) = 0$ en je houdt de oplossing met $r = 1$ over.

Opgave 2: $ty'' - ty' - y = 0$ $\quad y(0)=0$, $y'(0)=2$

a) $\mathcal{L}[ty'' - ty' - y] = 0$

$\mathcal{L}[ty''] - \mathcal{L}[ty'] - \mathcal{L}[y]$

$= \{\text{tabel}\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y''] + \frac{d}{ds}\mathcal{L}[y] - \mathcal{L}[y]$

$= \left\{ \text{tabel}: \begin{array}{l} \mathcal{L}[y''] = s^2\mathcal{L}[y] - y'(0) = s^2\hat{y}(s) - 2 \\ \mathcal{L}[y'] = s\,\mathcal{L}(y) - 0 = s\hat{y}(s) \end{array} \right\}$

$= -\frac{d}{ds}[s^2\hat{y} - 2] + \frac{d}{ds}[s\hat{y}] - \hat{y} = 0$

$-2s\hat{y} - s^2\frac{d\hat{y}}{ds} + \cancel{\hat{y}} + s\frac{d\hat{y}}{ds} - \cancel{\hat{y}} = 0$ (2)

dus $\frac{d\hat{y}}{ds}\, s(1-s) = 2s\hat{y}$

$\boxed{\frac{d\hat{y}}{ds} = \frac{2}{1-s}\hat{y}}$

b) Den diff vergl oplossen $\ln|\hat{y}| = -2\ln|1-s| + k$ (1)

$\hat{y}(s) = \frac{\tilde{k}}{(s-1)^2}$ $\quad (s>1)$

$\tilde{k}$ constante $\in \mathbb{R}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\tilde{k}}{(s-1)^2}\right] = \tilde{k}\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)}\right)\right]$

$= \tilde{k}\, t e^t$ (1)

$y(0) = 0$ en $\dot{y}(0) = \tilde{k} = 2$

dus $y(t) = 2te^t$ (netals bij opgave 1) opgave 3:

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underline{x}$$

① eigenvalues of A: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2+1] = 0$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 1+i$
$\lambda_3 = 1-i$

② Eigenvectors: $(\lambda_1 = 1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \underline{1+i}$: $\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 1 & 1 & -i \end{pmatrix} \rightarrow \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 1-i \rightarrow v_3 = \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

Je kunt nu of reeel werken of complex

~~reeel~~ complex: A is complex diagonaliseerbaar, dus

$S^{-1}AS$ met $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, is een diagonaal matrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$$e^{At} = S e^{(S^{-1}AS)t} S^{-1} = S e^{Dt} S^{-1}$$

S^{-1} uitrekenen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & i & -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -i & -i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -i & -i & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{i}{2} & +\frac{i}{2} & +\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & +\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} e^{(1+i)t} & -\frac{i}{2} e^{(1+i)t} & \frac{1}{2} e^{(1+i)t} \\ \frac{i}{2} e^{(1-i)t} & +\frac{i}{2} e^{(1-i)t} & \frac{1}{2} e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ -e^t + \frac{1}{2} e^t \cos t & +e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^t \sin t & +e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}$$

algemene opl $\underline{x}(t) = e^{At} \underline{x}_0 \qquad \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^3$

3b) $\dot{\underline{x}} = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \cos t$

particuliere opl: schrijf als complexe diffvergl.

$$\dot{\underline{z}} = A\underline{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{(1+i)t}$$

$$\underline{x}_p(t) = \mathrm{Re}[\underline{z}_p(t)]$$

merk op $(1+i)$ is eigenwaarde van homogene D.V. (zie a)

dus probeer $\underline{z}_p(t) = (\underline{b}_0 + \underline{b}_1 t)e^{(1+i)t}$

$$\underline{b}_1 \cancel{e^{(1+i)t}} + (\underline{b}_0 + \underline{b}_1 t)\cancel{e^{(1+i)t}}(1+i)$$

$$= A(\underline{b}_0 + \underline{b}_1 t)\cancel{e^{(1+i)t}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cancel{e^{(1+i)t}}$$

Dit moet gelden $\forall t \in \mathbb{R}$, dus

(1) $\underline{b}_1 + \underline{b}_0(1+i) = A\underline{b}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $(1+i)\underline{b}_1 = A\underline{b}_1$, dus $\underline{b}_1$ is eigenvector met eigenwaarde $(1+i)$, dwz $\underline{b}_1 = \alpha \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

invullen in (1)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ i\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \underline{b}_0(1+i) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\underline{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ i\alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + (1+i)\underline{b}_0$$

$$[A - (1+i)I]\underline{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ i\alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$\underline{b}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 & i\alpha - 1 \\ 1 & 1 & -i & \alpha \end{array}\right)$$

$x_1 = 0$

$2i\alpha - 1 = 0$

$\alpha = -\frac{i}{2}$

$-ix_2 - x_3 = -\frac{1}{2}$

$x_3 = -ix_2 + \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$

Dus $z_p(t) = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} t \right] e^{(1+i)t}$

$$= \left[\underbrace{x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}}_{\Downarrow} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix} t \right] e^{(1+i)t}$$

~~dit~~

kies $x_2 = 0$, want dit geeft aanleiding tot een bijdrage die ook in homogene opl voorkomt.

$$z_p(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} t \\ \frac{1}{2} - \frac{i}{2} t \end{pmatrix} e^{(1+i)t}$$

$$x_p(t) = \mathrm{Re}\left[z_p(t)\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} t \cos t \, e^{t} \\ e^{t}\left(\frac{1}{2} \cos t + \frac{t}{2} \sin t\right) \end{pmatrix}$$

4.
$$\dot{x} = -y - xy$$
$$\dot{y} = x + x^2$$

a) evenwichtspunten: $\dot{x} = 0 = y(1+x) = 0$

$\dot{y} = 0 = x(1+x)$

dus $x = 0$ en $y = 0$ of $x = -1$

b) bereken Jacobi matrix: $\begin{pmatrix} -y & -1-x \\ 1+2x & 0 \end{pmatrix}$

$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: eigenwaardes $\lambda_{1,2} = \pm i$

op de lijn $x = -1$: $J : \begin{pmatrix} -y & \cancel{0} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

eigenvalues: $\begin{vmatrix} -y-\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(y+\lambda) = 0$

$\lambda = 0 \vee \lambda = -y$

1 eigenwaarde $\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -y$

~~c~~ $(0,0)$ is een centrumpunt, en dus stabiel

$(-1,y)$ is instabiel punt als $y < 0$ en onbepaald als $y \geq 0$

c) Er zijn 2 ~~..~~ gevallen beide met reëel deel van $\lambda = 0$ dus we kunnen linearisatie niet gebruiken voor het ~~..~~ bepalen van de stabiliteit van het niet-lineaire systeem. Alleen als $y < 0$, dan weten we dat $(-1,y)$ ook in niet lin. instabiel is

4d)

$x = r\cos\theta \rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$

$y = r\sin\theta \quad\;\; \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$

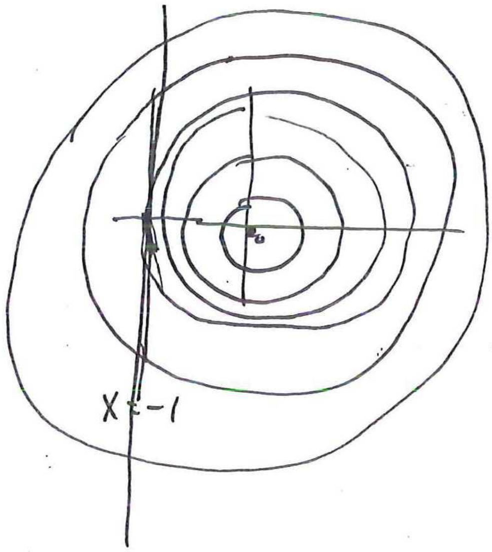
invullen in
$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -y(1+x)\\ \dot{y} &= x(1+x)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta} &= -r\sin\theta(1+r\cos\theta)\\ \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta} &= r\cos\theta(1+r\cos\theta)\end{aligned}\right.$$

eerste vergelyking $\times\cos\theta$
tweede " $\times\sin\theta$ } + $\quad \dot{r} = 0$

eerste vergl. $\times\sin\theta$
tweede " $\times\cos\theta$ } − $\quad r\dot{\theta} = r(1+r\cos\theta)$

dus $\dot{\theta} = 1 + r\cos\theta$

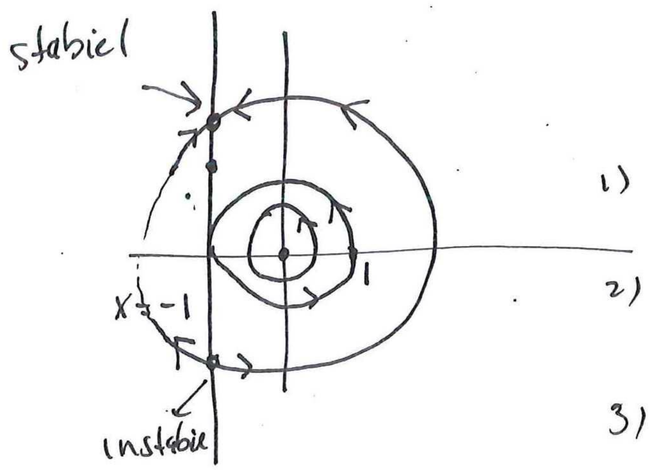
4e)



~~als r~~

teken de lyn $x=-1$ (~~...~~)
de banen zyn allemaal cirkels
want $\dot{r}=0$
voor $r<1$ is $\dot{\theta} > 0$
dwz dat er geen evenwichtspunt op de baan kan liggen.
En daarom zyn alle banen periodiek als $r<1$
(met uitzondering van de oorsprong)

4f)



1) lyn $x=-1$ tekenen

2) alle banen cirkels (met evt. evenwichtspunten

3) richting van ~~banen~~ oplossingen

5) $\frac{dy}{dt} = \frac{e^{y^2-1}}{1-t^2y^2}$ met $y(1)=2$

a) Existentie + eenduidigheidstelling:

De diff vergl $y' = f(t,y)$ met begin vw $y(t_0)=y_0$

heeft een unieke oplossing op het interval $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$

Als aan de volgende vw is voldaan: met $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ en $M = \max_{(t,y)\in R} |f(t,y)|$

i) $f(t,y)$ is continu op $R = [t_0-a, t_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]$

ii) f is Lipschitz continu in 2e variabele op R.

of $\frac{\partial f}{\partial y}$ is continu op R.

b) merk op dat $f(t,y) = \frac{e^{y^2-1}}{1-t^2y^2}$ continu is mits de noemer $\neq 0$.

omdat $f(t,y)$ het quotient is van 2 diffb functies in y is $\frac{\partial f}{\partial y}$ ook continu als noemer $\neq 0$

voor $t=1$ geldt dat $1 - 1^2 y^2(1) = -3 < 0$, dus

we kiezen een gebied R zdd $1-t^2y^2 < 0$ $\forall (t,y)\in R$

Beschouw eerst $M = \max_{(t,y)\in R} |f(t,y)| = \frac{e^{(2+b)^2} e^{-1}}{(1-a)^2(2-b)^2-1}$.

Hierbij is gebruikt dat de teller en de noemer stygende functies zyn van y, resp ~~x~~ t en y.

We kunnen nu b en a kiezen zolang $(1-a)^2(2-b)^2-1>0$

Kies bijv $b=\frac{1}{2}$ ($b\leq 1$ is nodig om een waarde van a te kunnen kiezen)

$(1-a)^2\frac{9}{4}-1>0$, dus $(1-a)^2 > 9/4$, ofwel $0 < a < 1/3$

neem bijv $a = 1/4$.

We vinden $M = \frac{e^{21/4}}{\frac{9}{16}\cdot\frac{9}{4}-1} = \left(\frac{64}{17}\right)e^{21/4}$

Dus $\alpha = \min\{\frac{1}{4}, e^{-21/4}\left(\frac{17}{64}\right)\cdot\frac{1}{2}\} = \frac{17}{128}e^{-21/4}$.

We hebben dus eenduidigheid en existentie tenminste op $[1-\alpha, 1+\alpha]$.