Deeltentamen Lineaire Algebra WI1105IN
3 juli 2009, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

1. Bereken de (reële) eigenwaarden van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ en ga na of A diagonaliseerbaar is. N.B. vermijd *onnodig* rekenwerk.)

2. Beschouw de Markov keten $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$ met kansmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Bereken de 'steady state' kansvector $\mathbf{q}$, corresponderend met de evenwichtstoestand.

3. Gegeven zijn de volgende vier vectoren in $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a. Bereken de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op $W = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

b. Bereken een orthogonale basis voor W en ook voor $W^\perp$.

4. **a.** Geef de matrix A van de kwadratische vorm

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_3.$$

b. Ga na of de kwadratische vorm postief (semi)definiet, negatief (semi)definiet of indefiniet is. (Een kwadr. vorm is positief semidefiniet als $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ voor elke $\mathbf{x}$, en er een $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ is waarvoor $Q(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.)

Z.O.Z. voor de laatste opgave

5. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

a. Laat zien dat het karakteristieke polynoom van A gegeven wordt door

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$$

b. Toon aan dat $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ een (complexe) eigenvector is van A.

c. Geef voor elke (reële en complexe) eigenwaarde een (reële dan wel complexe) eigenvector.

d. Bepaal de eigenwaarden van A^2 en gebruik dit om A^{100} te berekenen.

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1 $\text{Det}(A-\lambda I) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = \ldots = (3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) =$ $(3-\lambda)(\lambda-2)^2$ heeft eigenwaarden $\lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = 2$.
A is alleen diagonaliseerbaar als er twee onafhankelijke e.v.n zijn bij $\lambda_{2,3}$.
$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ heeft twee onafhankelijke rijen, dus er is slechts 1 eigenvector bij $\lambda_{2,3}$ en A is dientengevolge niet diagonaliseerbaar.

2 Makkie! $A\mathbf{q} = \mathbf{q}$ oplossen, oftewel $(A-I)\mathbf{q} = \mathbf{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.75 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.75 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Een oplossing: $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Normeren geeft $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2/6 \\ 3/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$.

3a Merk op dat $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ **niet** orthogonaal is!
Los op het kleinste kwadraten probleem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met $A = [\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3]$:

$$\left[A^TA\,|\,A^T\mathbf{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Waaruit de kl.kwadr. opl. is af te lezen: $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en daarmee de projectie

$\hat{\mathbf{b}} = A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3b Allereerst: $\dim(W) = 3$, dus $\dim(W^\perp) = 4 - 3 = 1$. Een basis voor $W^\perp$ is snel gevonden: $\mathbf{w}_4 = \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, staat loodrecht op W, dus geeft een basis voor $W^\perp$. Voor W kun je snel klaar zijn als je gebruikt dat $\mathbf{a}_1$ en $\mathbf{a}_3$ al orthogonaal zijn. Als derde orthogonale vector in W kun je $\mathbf{w}_2 = \mathbf{a}_2 - \hat{\mathbf{a}}_2$ met $\hat{\mathbf{a}}_2$

de projectie van $\mathbf{a}_2$ op span$\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3\}$ nemen (en dat gaat weer gemakkelijk door de orthogonaliteit):

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Een orthogonale basis wordt dan $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{a}_3\}$.

In de gegeven volgorde Gram-Schmidt toepassen kan ook, dat geeft (met wat schalen om breuken te voorkomen) de volgende basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4 Door te ontwikkelen naar de tweede kolom is snel in te zien dat

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-5) \cdot \lambda \end{aligned}$$

De eigenwaarden 2, 5 zijn positief, de derde eigenwaarde is 0, dus Q is positief semidefiniet.

5a Eerste stap: vegen met eerste kolom:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ \boxed{-1} & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1+\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

daarna ontwikkelen naar (bijv) derde rij:

$$\begin{aligned} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1+\lambda & 4 \\ 1-\lambda & 3 \end{vmatrix} + (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = {} & -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 \\ = {} & (1-\lambda)(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

5b

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+i \\ i \\ -i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = i\mathbf{v}$$

Dus inderdaad, $\mathbf{v}$ is een eigenvector, en wel bij eigenwaarde i.

5c De andere eigenwaarden zijn $-i$ en 1.

Een eigenvector voor $-i$ is $\mathbf{v}_2 = \bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Voor de eigenwaarde 1 moet even wat gerekend worden:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2-1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2-1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

waaruit eenvoudig een eigenvector $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ is af te lezen

5d 't Kan kort: A is complex diagonaliseerbaar:

$A = PDP^{-1}$, waarbij $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$,

dus $A^{100} = PD^{100}P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

Of, als je je niet prettig voelt bij complex diagonaliseren:

A^2 heeft eigenwaarden $1^2,\ i^2,\ (-i)^2 = 1,\ -1,\ -1$.

$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, dus $A^2 - (-1)I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. Deze matrix heeft rang 1, dus er zijn twee eigenvectoren bij eigenwaarde -1, dus $A^2 = PDP^{-1}$ met nu $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, dus $A^{100} = (A^2)^{50} = PD^{50}P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.