Lineaire Algebra WI1105IN deel 1
16 juni 2009, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

1. Bereken de inverse van de matrix (geef de berekening stap voor stap)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ en de vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

a. Bereken alle waarde(n) van α waarvoor de kolommen van A afhankelijk zijn.

b. Geef een basis voor $\operatorname{Nul} A$ voor het geval dat $\alpha = -1$.

c. Voor welke waarde(n) van α is $\mathbf{b}$ een element van de kolomruimte van A?

3. Gegeven zijn de LU-ontbinding van een matrix A en een vector $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Beantwoord de volgende vragen *zonder* eerst het product uit te rekenen

a. Los de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op.

b. Bereken – nog steeds zonder het product uit te rekenen – de determinant van A.

c. Bereken de determinant van $2A^{-1}$.

Z.O.Z. voor opgaven 4 en 5 !!

4. De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heeft matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Geef de definitie van een surjectieve afbeelding ('onto mapping'); dus: een afbeelding heet surjectief als ......
Ga na of de afbeelding T surjectief is.

b. Bereken alle originelen van de vectoren (de punten)
$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Schets deze in het platte vlak.

c. Geef een meetkundige beschrijving van de afbeelding T.

5. Geef telkens *in woorden* een plan hoe je een matrix *zonder nullen* met de gewenste eigenschap kunt vinden, en bereken met dit plan een voorbeeld van zo'n matrix.

a. Een 4×5 matrix A waarvoor $\dim \operatorname{Nul} A^T = 3$.

b. Een 5×5 matrix C met determinant gelijk aan 6.
N.B. Vergeet niet een plan *in woorden* te geven!

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1 De standaard aanpak: $[A|I]$ reduceren tot $[I|B]$, beginnend van 'rechtsonder':

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Het antwoord wordt: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

2a Je zou 't gelijk kunnen zien: $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$, onafhankelijk van α, dus de kolommen zijn *altijd* afhankelijk. Je kunt ook rij-reduceren:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Er zijn drie pivots; de kolommen zijn *altijd* afhankelijk.

2b In **a.** is gevonden dat $A \sim E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en de nulruimtes van A en E zijn gelijk. Er zijn drie pivots, dus $\text{Nul}(E) = 1$ en de bij **a.** genoemde relatie (of een blik op matrix E) leert dat $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ een basis is voor $\text{Nul}(A)$.

2c Nog maar een keer vegen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+2(\alpha-1) \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

en het is duidelijk dat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alleen oplossingen heeft als $2 + 2(\alpha - 1) = 0$, oftewel als $\boxed{\alpha = 0}$.

3a $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \text{ geeft } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ en dan } U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ geeft } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3b

$$\det(LU) = \det(L)\det(U) = 1 \cdot 4 = 4.$$

3c

$$\det(2A^{-1}) = \det(2I \cdot A^{-1}) = \det(2I)\det(A^{-1}) = 2^4(\det(A))^{-1} = 4.$$

4a T is surjectief als er voor elke $\mathbf{y}$ een $\mathbf{x}$ is zodat $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.
Hiervoor is het nodig dat de kolommen van matrix A de $\mathbb{R}^2$ opspannen, hetgeen hier duidelijk *niet* het geval is.

4b $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$ oplossen: $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$ betekent $-2x_1 + x_2 = 1$. Anders geschreven: $x_2 = 1 + 2x_1$, dat geeft de lijn door $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ met richtingsvector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Net zo voor $\mathbf{q}$: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

4c T stuurt ('projecteert') punten uit het vlak in de richting $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ naar de x_2-as.

5a A^T is een 5×4 matrix. $\dim \text{Col}\, A^T = 4 - \dim \text{Nul}\, A^T = 1$, dus de kolommen van A^T zijn allemaal veelvouden van een en dezelfde vector, en het antwoord is simpelweg een 4×5 matrix met maar één onafhankelijke rij.

Een voorbeeld: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5b Trial en error kan, maar 't kan handiger: Gebruik $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, en: de determinant van een driehoeksmatrix is gelijk aan het product van de diagonaalelementen. Een voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Andere mogelijkheid (die in feite wel een beetje op hetzelfde neerkomt): neem de matrix B van boven, die heeft determinant 6, en tel de eerste rij op bij alle andere rijen (waardoor de determinant niet verandert). Dat geeft:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

NORMEN

Voor het hele tentamen: in principe $-\mathbf{0.5}$ per rekenfout.

1 3 pt. Per rekenfout: -1.

2a 2 pt.

2b 2 pt.

2c 2 pt.

3a 3 pt.

3b 2 pt.

3c 2 pt.

4a 3 pt.

4b 2 pt.

4c 1 pt.

5a 3 pt.

5b 2 pt.

cijfer $:= \frac{1}{3} \cdot (\textbf{totaal} + 3)$**, afgerond op geheel getal.**