Tentamen Lineaire Algebra WI1105IN, deel 1
31 maart 2009, 9.00 − 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.
Normering: opg.1: 9; opg.2: 6; opg.3: 7; opg.4: 9; opg.5: 5.

1. **a.** Ga na voor welke waarden van α en β het onderstaande stelsel **één**, **geen** dan wel **oneindig veel** oplossingen heeft.
Tip: veeg met beleid.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

b. Bewijs of weerleg met een tegenvoorbeeld de volgende twee beweringen betreffende een 4×7 matrix A:

(i) het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft altijd oneindig veel oplossingen.
(ii) het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft minimaal drie *onafhankelijke* oplossingen.

2. Gegeven is dat A gereduceerd kan worden tot U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -10 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Beredeneer zonder verder rekenwerk of de eerste drie kolommen van A afhankelijk of onafhankelijk zijn

b. Ga na of de vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ een element is van de nulruimte van A.

c. Bereken een basis voor de nulruimte van A.

3. NB: deze vraag zonder rekenmachine oplossen!
Gegeven zijn twee matrices en een vector

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

a. Bereken de determinant van A.

b. Gegeven is verder dat $AB = 14I$. (Dat hoeft u dus niet na te rekenen!)
Gebruik dit gegeven om A^{-1} te bepalen.

c. Los op: $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$. (Tip: onderdeel **b.** beperkt het rekenwerk aanzienlijk)

4. De afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven door het voorschrift

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ x_2 + x_3).$$

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding.
Bereken de matrix van T.

b. Bereken alle vectoren $\mathbf{x}$ die door T op de vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ worden afgebeeld.

c. Ga na of T surjectief ('onto') is.

d. Ga na of T injectief ('one-to-one') is.

5. S_1, S_2 zijn de spiegelingen van het vlak in de twee (evenwijdige) lijnen
$\ell : y = -x$, respectievelijk $m : x + y = 4$

a. Geef de standaardmatrix A (dus een 2×2 matrix) die hoort bij de afbeelding S_1.

b. Toon aan dat S_2 niet lineair is en geef de matrix B die de afbeelding S_2 in homogene coördinaten beschrijft.