Tentamen Lineaire Algebra WI1105IN, deel 1
31 maart 2009, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.
Normering: opg.1: 9; opg.2: 6; opg.3: 7; opg.4: 9; opg.5: 5.

---

1. **a.** Ga na voor welke waarden van α en β het onderstaande stelsel **één**, **geen** dan wel **oneindig veel** oplossingen heeft.
Tip: veeg met beleid.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

b. Bewijs of weerleg met een tegenvoorbeeld de volgende twee beweringen betreffende een 4×7 matrix A:

(i) het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft altijd oneindig veel oplossingen.
(ii) het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft minimaal drie *onafhankelijke* oplossingen.

2. Gegeven is dat A gereduceerd kan worden tot U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -10 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Beredeneer zonder verder rekenwerk of de eerste drie kolommen van A afhankelijk of onafhankelijk zijn

b. Ga na of de vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ een element is van de nulruimte van A.

c. Bereken een basis voor de nulruimte van A.

3. NB: deze vraag zonder rekenmachine oplossen!
Gegeven zijn twee matrices en een vector

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

a. Bereken de determinant van A.

b. Gegeven is verder dat $AB = 14I$. (Dat hoeft u dus niet na te rekenen!)
Gebruik dit gegeven om A^{-1} te bepalen.

c. Los op: $A\mathbf{x} = \mathbf{p}$. (Tip: onderdeel **b.** beperkt het rekenwerk aanzienlijk)

4. De afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven door het voorschrift
$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ x_2 + x_3)$.

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding.
Bereken de matrix van T.

b. Bereken alle vectoren $\mathbf{x}$ die door T op de vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ worden afgebeeld.

c. Ga na of T surjectief ('onto') is.

d. Ga na of T injectief ('one-to-one') is.

5. S_1, S_2 zijn de spiegelingen van het vlak in de twee (evenwijdige) lijnen
$\ell :\ y = -x$, respectievelijk $m :\ x + y = 4$

a. Geef de standaardmatrix A (dus een $2{\times}2$ matrix) die hoort bij de afbeelding S_1.

b. Toon aan dat S_2 niet lineair is en geef de matrix B die de afbeelding S_2 in homogene coördinaten beschrijft.

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1a Verwissel de tweede en derde rij en veeg de aangevulde matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \alpha & \beta & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \alpha-2 & \beta-2 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & (\beta-2-2(\alpha-2)) & -3-3(\alpha-2) \end{array}\right]$$

Conclusies:
- a. als $(\beta - 2 - 2(\alpha - 2)) \neq 0$, d.w.z. als $\beta \neq 2\alpha - 2$, dan zijn er drie pivots, dus is het stelsel **eenduidig** oplosbaar.
- b. als $\beta = 2\alpha - 2$ en $-3 - 3(\alpha - 2) \neq 0$ (dwz $\alpha \neq 1$) dan correspondeert de derde rij met een valse vergelijking, dus zijn er **geen** oplossingen.
- c. het enige overgebleven geval: $\alpha = 1$ en $\beta = 2\alpha - 2 = 0$, dan zijn er twee pivots, is het stelsel niet strijdig, dus heeft het **oneindig veel** opln..

1b A heeft vier rijen en zeven kolommen.

(i) Is onwaar: in het algemeen zullen de zeven kolommen de $\mathbb{R}^4$ opspannen, maar dat hoeft niet. Heel flauw: neem voor A de nulmatrix!

(ii) Dit is waar: vegen van A geeft een echelonmatrix met hoogstens vier pivots (want er zijn maar vier rijen); dat betekent dat er minstens drie kolommen zonder pivots zijn, en er dus minstens drie vrije variabelen zijn in de oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, en dat impliceert weer dat er minstens drie onafhankelijke oplossingen zijn.

2a De eerste drie kolommen van U zijn afhankelijk (en je ziet gelijk dat $\mathbf{u}_3 = -2\mathbf{u}_2 + 6\mathbf{u}_1$) dus zijn ook de eerste drie kolommen van A afhankelijk (en geldt $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_1$).

2b Noem de gegeven vector maar even $\mathbf{v}$. Je hoeft alleen te checken of $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dat is niet zo, dus $\mathbf{v} \notin \text{Nul}(A)$.

2c Veeg nog iets verder met de matrix U

$$A \sim U \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Er is één vrije variabele in de oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dus de nulruimte heeft dimensie 1, en een basis wordt gegeven door één niet-triviale oplossing, bijvoorbeeld: $\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3a Veel wegen leiden naar het antwoord. Mogelijke aanpak: trek de onderste rij van alle andere rijen af en tel daarna de eerste vier kolommen op bij de vijfde kolom (pas na de eerste stap zie je dat dat handig is!):

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = |L|$$

En de determinant van een bovendriehoeksmatrix is simpelweg het product van de diagonaalelementen: $|A| = |L| = 2^4 \cdot 7 = 112$

3b Uit $AB = 14I$ volgt $\frac{1}{14}AB = A(\frac{1}{14}B) = I$, en daar staat min of meer dat $\frac{1}{14}B$ de inverse is van A (want een van de uitspraken uit de stelling over de inverse van een matrix zegt, voor vierkante A: als $AB = I$ dan is $B = A^{-1}$).

3c Eén matrixvermenigvuldiging volstaat: we weten dat A inverteerbaar is, dus

$$A\mathbf{x} = \mathbf{p} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{p} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

4a

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$$

Elke afbeelding van de vorm $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ is lineair.

4b Oplossen: $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Doe 'ns gek: neem x_2 als vrije variabele; dan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

4c Een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^4$ is nooit surjectief.
Eventueel extra toelichting: surjectief betekent (hier): het beeld van T is de hele $\mathbb{R}^4$. Het beeld van T is de kolomruimte van de matrix A van T. In dit geval is de dimensie van die kolomruimte *hoogstens* 3, en kan de kolomruimte dus *niet* de hele $\mathbb{R}^4$ zijn.

4d T is niet one-to-one: bij onderdeel b. was al gevonden dat er een vector $\mathbf{y}$ is met meer dan 1 origineel.
Ook een goed argument: de kolommen van A zijn afhankelijk.

5a Een plaatje leert dat $S_1\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ en $S_1\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ waaruit volgt dat de matrix bij S_1 wordt $A=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$.

5b Voor een lineaire afb. T geldt altijd $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, maar $S_2\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$, dus T is niet lineair.
Aanpak 1: eerst T_1: transleren over $\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}$, dan T_2: spiegelen in de lijn $y=-x$, gevolgd door T_1: transleren over $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ In homogene coördinaten:

$$[T_3][T_2][T_1]=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\ldots=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&0&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Alternatief (maak een schets):

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},$$

in homogene coördinaten

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4\\4\\1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4\\3\\1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix},$$

We zoeken dus de matrix M zodat $M\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3&4\\3&4&4\\1&1&1\end{bmatrix}$.
Door het product te zien als een bewerking op de kolommen van M is eenvoudig in te zien dat M precies de eerder gevonden matrix is.

NORMEN

1a 5 pt. waarvan **2** pt. voor vegen tot echelonvorm

1b 2+2 pt.

2a 2 pt.

2b 2 pt.

2c 2 pt. (indien niet expliciet een basis gegeven: **0.5** aftrek.)

3a 3 pt.

3b 2 pt.

3c 2 pt.

4a 3 pt. waarvan **1** voor de matrix, **2** voor aantonen lineariteit

4b 2 pt.

4c 2 pt.

4d 2 pt.

5a 2 pt.

5b 3 pt.

cijfer := $\frac{1}{4} \cdot (\textbf{totaal} + 4)$ **+ evt. 'Matlab-bonus',**
afgerond op geheel getal.