Tentamen Lineaire Algebra WI1105IN
25 augustus 2008, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

a. Bereken de rang van A.
Welke eigenwaarde van A volgt hieruit?

b. Toon aan dat -2 een eigenwaarde is van A.

c. Toon aan dat $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van A.

d. Toon aan dat A diagonaliseerbaar is en bereken $2^{-14}A^{15}$.

2. **a.** Bereken de complexe eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

b. Bereken de kleinste-kwadratenoplossing van het stelsel

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 = 1. \end{cases}$$

Z.O.Z. voor opgaven 3 en 4

3. **a.** Vind (met behulp van de methode van Gram-Schmidt) een

orthogonale basis voor span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

b. Stel een 4 bij 4 matrix B heeft eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$, waarbij bekend is

$$-5 \leq \lambda_1 \leq -4, \quad -3 \leq \lambda_2 \leq -2, \quad 0 \leq \lambda_3 \leq 1 \quad \text{en} \quad 5 \leq \lambda_4 \leq 6.$$

Welke eigenwaarde wordt benaderd met de ('standaard') powermethode?

Welke eigenwaarde wordt benaderd met de inverse powermethode toegepast op de matrix $(B + 2I)$?

4. Geef van elk van de volgende beweringen een kort bewijs.

a. Als $\mathbf{v}$ een eigenvector is van A en ook van B, dan is $\mathbf{v}$ ook een eigenvector van AB.

b. Als $A = QR$ waarbij R een bovendriehoeksmatrix is met positieve diagonaal, en Q een matrix met orthonormale kolommen, dan is de kleinste kwadraten oplossing $\hat{\mathbf{x}}$ van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gelijk aan de oplossing van het stelsel $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$.

c. Als $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^n$ orthogonaal zijn, dan geldt $||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^2 = ||\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{b}||^2$, en omgekeerd, als $||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^2 = ||\mathbf{a}||^2+||\mathbf{b}||^2$, dan zijn $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ orthogonaal.

N.B. Je moet hier dus **twee** dingen aantonen.

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1a De eerste twee kolommen van A zijn evident onafhankelijk en de derde kolom is de tegengestelde van de tweede (en dus afhankelijk hiermee), dus de rang van A is twee. $0\mathbf{a}_1 + 1 \cdot \mathbf{a}_2 + (-1)\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ betekent $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1$, voor de vector $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, dus $\mathbf{v}_1$ is eigenvector van A bij eigenwaarde $\lambda_1 = 0$.

1b

$$\mathrm{Det}(A-(-2)I) = \begin{vmatrix} 0-(-2) & -2 & 2 \\ 1 & 1-(-2) & -1 \\ 3 & 1 & -1-(-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

want de laatste twee rijen zijn gelijk.

1c Eenvoudig te checken: $A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{w}$, dus 2 is een eigenwaarde.

1d Gezien: A heeft drie verschillende eigenwaarden en daarbij (automatisch) drie onafhankelijke eigenvectoren. Dat geeft een basis van eigenvectoren, dus A is diagonaliseerbaar.
Berekening van $2^{-14}A^{15}$: door bij onderdeel b. nog even door te vegen volgt een eigenvector bij eigenwaarde -2: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, dus geldt $A = PDP^{-1}$ met $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ en $P = [\,\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \;\; \mathbf{w}\,]$. (De precieze waarde van P doet er overigens niet toe!) Dan geldt:

$$2^{-14}A^{15} = 2^{-14}(PDP^{-1})^{15} = 2^{-14}PD^{15}P^{-1} = P(2^{-14}D^{15})P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

want

$$2^{-14}D^{15} = 2^{-14}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{15} = 2^{-14}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{15} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

2a $|B - \lambda I| = (2-\lambda)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 2 - \lambda = \pm 2i$.
De eigenwaarden zijn: $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$.
Eigenvector bij $\lambda_1 = 2 - 2i$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2-\lambda_1 & 2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda_1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2i & \boxed{2} & 0 \\ -2 & 2i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Een eigenvector bij λ_1: $\quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ (of $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$) en door conjugeren:
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ is e.v. bij $\lambda_2 = 2 + 2i$ (of evt. $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$).

2b Kleinste-kwadratenoplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: los op: $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 18 & 3 & 33 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 11 \\ -11 & 0 & -18 \end{array}\right]$$

Dus we vinden $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 18/11 \\ 13/11 \end{bmatrix}$.

3a Noem de vectoren maar even $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Dan

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1,$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = [0\ 3\ \ -3\ 3]^T = 3\,[0\ 1\ \ -1\ 1]^T$$

Ik reken door met $\mathbf{b}_2 = [0\ 1\ \ -1\ 1]^T$.

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \tfrac{12}{3}\mathbf{b}_1 - \tfrac{-6}{3}\mathbf{b}_2 = [-3\ 1\ 2\ 1]^T$$

3b Met de gewone powermethode wordt de in absolute waarde grootste eigenwaarde benaderd, en hier is dat λ_4.
De inverse powermethode toegepast op $(B + 2I)$ benadert de in absolute waarde kleinste eigenwaarde van $B + 2I$ minus 2. De e.w.n van $(B + 2I)$ liggen tussen -3 en -2, tussen -1 en 0, tussen 2 en 3 en tussen 7 en 8. De kleinste is degene tussen -1 en 0, oftewel $\lambda_2 + 2$, dus de e.w. van B die je hiermee benadert is λ_2.

4a Stel $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ en $B\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$, dan is $AB\mathbf{v} = A(B\mathbf{v}) = A\mu\mathbf{v} = \mu A\mathbf{v} = \mu\lambda\mathbf{v}$, dus $\mathbf{v}$ een eigenvector van AB bij eigenwaarde $\lambda\mu$.

4b $\hat{\mathbf{x}}$ is de oplossing van $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. Invullen van $A = QR$, en gebruikmaken van $Q^T Q = I$ en het feit dat R (en dus ook R^T) inverteerbaar is levert

$$\begin{aligned} (QR)^T QR\mathbf{x} = (QR)^T\mathbf{b} \quad &\Leftrightarrow \quad R^T \underline{\underline{Q^T Q}} R\mathbf{x} =^T Q^T\mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \quad R^T\, \underline{\underline{I}}\, R\mathbf{x} = R^T Q^T\mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \quad R^T R\mathbf{x} = R^T Q^T\mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \quad R\mathbf{x} = (R^T)^{-1} R^T Q^T\mathbf{b} = Q^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

4c Nodig: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ en: $||\mathbf{a}||^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$.

Doordat alle stappen in de volgende afleiding twee kanten op werken, zijn de eerste en de laatste bewering equivalent:

$$
\begin{aligned}
& ||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^2 = ||\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{b}||^2 \\
\Leftrightarrow\ & (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow\ \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.
\end{aligned}
$$

NORMEN

1a **3** pt: **1** voor rang; **2** voor e.w. 1

1b **2** pt.

1c **2** pt.

1d **3** pt: **2** voor diag.b.heid, **1** voor $2^{-14}A^{15}$.

2a **4** pt: **2** voor e.w.n en ook **2** voor e.v.n.

2b **3** pt: **2** voor normaalvgln. en **1** voor oplossing.

3a **3** pt: **1** voor $\mathbf{b}_2$ en **2** voor $\mathbf{b}_3$.

3b **3** pt: **1** pt + **2** pt.

4a **2** pt: naar bevind van zaken.

4b **2** pt: idem.

cijfer := $\frac{1}{3} \cdot (\textbf{totaal} + 3)$**, afgerond op geheel getal.**