Tentamen Lineaire Algebra WI1105IN, deel 2

4 juli 2008, 9.00 − 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of Engels). Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. De matrix $A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$ heeft de eigenwaarde $\lambda_1 = 0.7 + 0.6i$ met bijbehorende eigenvector $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3i - 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   a. Bereken alle (ook de complexe) eigenwaarden van A en geef de bijbehorende eigenvectoren.

   b. Geef een (reële) inverteerbare matrix P en een matrix $C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ zodat $A = P\,C\,P^{-1}$.

   c. Ga na of de oorsprong een aantrekkend ('attractor') of afstotend ('repellor') punt is voor het dynamische systeem

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k.$$

2. In $\mathbb{R}^4$ zijn gegeven $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, en verder $W = \operatorname{span}\{\mathbf{a}\}$.

   a. Bereken een basis voor $W^{\perp}$.

   b. Bereken de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op $W^{\perp}$.

Z.O.Z voor opgaven 3 en 4

3. We bekijken de kwadratische vorm $q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$.

   a. Geef de matrix A die hoort bij deze kwadratische vorm.

   b. Bereken een orthogonale matrix P zodat $A = PDP^{-1}$ met D een diagonaalmatrix.

4. Geef telkens aan of de bewering waar of niet waar is. (Uiteraard met een toelichting: een bewijs of een tegenargument).

   a. Elke matrix A die alleen niet-reële eigenwaarden heeft is inverteerbaar.

   b. Als $\mathbf{v}$ een eigenvector is van A, dan is $\mathbf{v}$ ook een eigenvector van A^2.

   c. Elke bovendriehoeksmatrix is diagonaliseerbaar.

   d. Als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ eenheidsvectoren zijn in $\mathbb{R}^n$, dan geldt $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$.