# Tentamen Lineaire Algebra WI1105IN, deel 2

4 juli 2008, 9.00 – 11.00 uur

---

**Toelichting:** Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands (of Engels). Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

**1.** De matrix $A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$ heeft de eigenwaarde $\lambda_1 = 0.7 + 0.6i$ met bijbehorende eigenvector $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3i - 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

**a.** Bereken alle (ook de complexe) eigenwaarden van $A$ en geef de bijbehorende eigenvectoren.

**b.** Geef een (reële) inverteerbare matrix $P$ en een matrix $C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ zodat $A = P\,C\,P^{-1}$.

**c.** Ga na of de oorsprong een aantrekkend ('attractor') of afstotend ('repellor') punt is voor het dynamische systeem

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k.$$

**2.** In $\mathbb{R}^4$ zijn gegeven $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, en verder $W = \text{span}\{\mathbf{a}\}$.

**a.** Bereken een basis voor $W^{\perp}$.

**b.** Bereken de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op $W^{\perp}$.

**Z.O.Z voor opgaven 3 en 4**

**3.** We bekijken de kwadratische vorm $q(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$.

**a.** Geef de matrix $A$ die hoort bij deze kwadratische vorm.

**b.** Bereken een orthogonale matrix $P$ zodat $A = PDP^{-1}$ met $D$ een diagonaalmatrix.

**4.** Geef telkens aan of de bewering waar of niet waar is. (Uiteraard met een toelichting: een bewijs of een tegenargument).

**a.** Elke matrix $A$ die alleen niet-reële eigenwaarden heeft is inverteerbaar.

**b.** Als $\mathbf{v}$ een eigenvector is van $A$, dan is $\mathbf{v}$ ook een eigenvector van $A^2$.

**c.** Elke bovendriehoeksmatrix is diagonaliseerbaar.

**d.** Als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ eenheidsvectoren zijn in $\mathbb{R}^n$, dan geldt $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

**ANTWOORDEN + UITWERKINGEN**

**1a** Eigenvector bij $0.7 + 0.6i$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.5-(0.7+0.6i) & -0.5 & 0 \\ 0.8 & 0.9-(0.7+6i) & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2-6i & -5 & 0 \\ \boxed{8} & 2-6i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2-6i & 0 \end{array}\right]$$

want $-5+\frac{1}{8}(2+6i)(2-6i) = 0$. Dus een eigenvector bij $\lambda = 0.7+0.6i$ wordt bijv. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2-6i \\ -8 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 3i-1 \\ 4 \end{bmatrix}$, en die was al gegeven. De tweede eigenwaarde is $\bar{\lambda} = 0.7-0.6i$ met de eigenvector $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3i-1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (de geconjugeerde van $\mathbf{v}_1$).

**1b** Neem $P = [\operatorname{Re}\mathbf{v}_2 \ \ \operatorname{Im}\mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, dan $P^{-1}AP = C = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.6 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$, en $A = PCP^{-1}$.
Je kunt naturlijk ook uitgaan van eigenvector $\mathbf{v}_1$. Dan volgt

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ -0.6 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

**1c** Er geldt $|\lambda_i| = \sqrt{0.6^2+0.7^2} = \sqrt{0.85} < 1$, dus alle eigenwaarden hebben modulus kleiner dan 1 en de oorsprong is aantrekkend.

**2a** Nodig: drie onafhankelijke vectoren orthogonaal met $\mathbf{a}$.
Deze moeten voldoen aan het stelsel met aangevulde matrix $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$
en daarvoor kun je bijv. nemen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

**2b** Stel $\hat{\mathbf{b}}$ en $\mathbf{v}$ zijn de projecties op $W$ resp $W^\perp$; dan geldt: $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}$, en $\hat{\mathbf{b}}$ is eenvoudig te berekenen:

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{9}{3}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dus} \quad \mathbf{v} = \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**3a** $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

**3b** Nodig: eigenwaarden en eigenvectoren.

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda)-4$$

En $(3-\lambda)(6-\lambda)-4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda-2)(\lambda-7)$. Dit is gelijk aan 0 voor $\lambda = 2$ en $\lambda = 7$.

Eigenvectoren bij $\lambda = 2$ : $\left[\begin{array}{cc|c} 3-2 & -2 & 0 \\ -2 & 6-2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Eenvoudig in te zien: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ is eigenvector, en analoog $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ is eigenvector bij $\lambda = -7$.

Normeren geeft gezochte $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

**4a** Is **waar**: een matrix is niet-inverteerbaar precies dan als 0 een eigenwaarde is. Als de eigenwaarden niet-reëel zijn, dan is 0 natuurlijk geen eigenwaarde.

**4b** Dat is **waar**: stel $A\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, dan $A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A\lambda\,\mathbf{v} = \lambda\,A\mathbf{v} = \lambda\cdot\lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$, dus $\mathbf{v}$ is eigenvector van $A$ bij $\lambda^2$.

**4c Niet waar**: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ heeft dubbele eigenwaarde $\lambda = 2$, maar daarbij slechts één onafhankelijke eigenvector.

**4d** Is **waar**: gegeven is $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = ||\mathbf{u}||^2 = 1$, en net zo voor $\mathbf{v}$. Dan volgt

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1-1 = 0.$$