Lineaire Algebra WI1105IN deel 1
30 juni 2008, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. Gegeven zijn de matrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ en de vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

De kolommen van A geven we aan met $\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_4$.
Lees eerst de hele vraag door; dat kan je wat rekenwerk schelen.

a. Toon aan dat de kolommen van B onafhankelijk zijn.

b. Bereken de vierde kolom van B^{-1}

c. Bereken $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, de coördinaatvector van $\mathbf{v}$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_4\}$.

2. Gegeven zijn de LU-ontbinding van een matrix A en een vector $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a. Los de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op *zonder* eerst het product uit te rekenen.

b. Bereken – eveneens zonder het product uit te rekenen – de determinant van A.

c. Bereken de determinant van $2A^{-1}$.

Z.O.Z. voor opgaven 3 en 4 !!

3. R is de rotatie om het punt $(0,0)$ over een hoek $\frac{1}{2}\pi$,
S is de spiegeling in de lijn $x + y = 2$.

a. Geef de (2×2) matrix A die bij de rotatie R hoort.

b. Geef de matrix B die de afbeelding S in homogene coördinaten beschrijft. (Tip: Check je antwoord voor het punt (0,0).)

4. Geef telkens *in woorden* een plan hoe je een matrix <u>*zonder nullen*</u> met de gewenste eigenschap kunt vinden, en bereken met dit plan een voorbeeld van zo'n matrix.

a. Een 4×5 matrix A waarvoor $\dim \operatorname{Nul} A = 3$.

b. Een 2×2 matrix B waarvoor $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c. Een 5×5 matrix C met determinant gelijk aan 6.

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1c Voor onderdeel b. moet opgelost worden $B\mathbf{x} = \mathbf{e}_4$ en voor onderdeel c. $B\mathbf{x} = \mathbf{v}$. Dat kan met één aangevulde matrix gebeuren. En passant zal blijken dat de matrix B vier pivots heeft, dus precies vier onafhankelijke kolommen.

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Om fouten te voorkomen kun je nog even de tweede en derde rij verwisselen.

- B heeft evident 4 pivots, waarmee a. beantwoord is.
- Antwoord op onderdeel b.: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Antwoord op onderdeel c.: $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2a $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \text{ geeft } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ en dan } U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ geeft } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2b

$$\det(LU) = \det(L)\det(U) = 1 \cdot 4 = 4.$$

2c

$$\det(2A^{-1}) = \det(2I \cdot A^{-1}) = \det(2I)\det(A^{-1}) = 2^4(\det(A))^{-1} = 4.$$

3a $R = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{2}\pi & -\sin\frac{1}{2}\pi \\ \sin\frac{1}{2}\pi & \cos\frac{1}{2}\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Namelijk, de derde matrix in het product (de eerste die wordt toegepast op een vector $\mathbf{x}$) correspondeert met een translatie over de vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, die de lijn $y = 2 - x$ afbeeldt op de ermee evenwijdige lijn $y = -x$, die door de oorsprong gaat, en de middelste matrix geeft de spiegeling in de lijn $y = -x$.

4a dim Col A = 5 - dim Nul A, dus het antwoord is simpelweg een matrix met twee onafhankelijke kolommen. Eenvoudig voorbeeld: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

4b Neem de eerste rij willekeurig, bijv. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ c & d \end{bmatrix}$.

Dan $A^2 = \begin{bmatrix} 1-c & -1-d \\ c(1+d) & -c+d^2 \end{bmatrix}$, en $c = 1$, $d = -1$ doen 't.

Het resultaat: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

4c Trial en error kan, maar 't kan handiger: Gebruik $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, en: de determinant van een driehoeksmatrix is gelijk aan het product van de diagonaalelementen. Een voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Andere mogelijkheid (die in feite wel een beetje op hetzelfde neerkomt): neem de matrix B van boven, die heeft determinant 6, en tel de eerste rij op bij alle andere rijen (waardoor de determinant niet verandert). dat geeft:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$