Deeltentamen Lineaire Algebra WI1105IN
2 april 2007, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. Gegeven zijn de volgende vijf vectoren in $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

Verder is gedefinieerd $H = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$.

a. Toon aan dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4\}$ een basis is voor H.

b. Toon aan dat $\mathbf{v}$ een element is van H en bereken de coördinaten van $\mathbf{v}$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ uit onderdeel **a**.

2. a. Bereken de inverse van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(Laat een stap-voor-stap berekening zien.)

b. Bereken de matrix X waarvoor geldt $AX = B$, als $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

3. $R_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de rotatie om het punt (0,0) over een hoek $\frac{1}{4}\pi$ en $R_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de rotatie om het punt (2,2) over een hoek $\frac{1}{2}\pi$.

a. Geef de standaardmatrix A (dus een 2×2 matrix) die bij de rotatie R_1 hoort.

b. Ga na of de afbeelding R_2 lineair is.

c. Geef de matrix B die de afbeelding R_2 in homogene coördinaten beschrijft.

4. Gegeven zijn de LU-ontbinding van een matrix A en een vector $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a. Los de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op *zonder* eerst het product uit te rekenen. (Als je het product wel uitwerkt kun je geen punten krijgen voor deze som.)

b. Bereken – eveneens zonder het product uit te rekenen – de determinant van A.

c. Bereken de determinant van $2A^{-1}$.

5. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a. Ga na of de vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van A.

Zo ja, geef de bijbehorende eigenwaarde.

b. Ga na of 2 een eigenwaarde is van A. Zo ja, bereken een basis voor de bijbehorende eigenruimte.

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1b Vegen geeft

$$[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4\ \mathbf{v}] \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daaruit volgt: $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4\}$ is een basis voor H, en $\mathbf{v} = 1\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_4$, dus $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2a De standaard aanpak: $[A|I]$ reduceren tot $[I|B]$ levert $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2b $AX = B \iff X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

3a $R = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{4}\pi & -\sin\frac{1}{4}\pi \\ \sin\frac{1}{4}\pi & \cos\frac{1}{4}\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

3b R_2 is niet lineair, bijvoorbeeld niet omdat $R_2(\mathbf{0} \neq \mathbf{0}$,
of ook omdat bijv. voor de vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $c = 2$ evident *niet* geldt $R_2(c\mathbf{b}) = cR_2(\mathbf{b})$.

3c De rotatie kan ontbonden worden als $T_3T_2T_1$ waarbij T_1 de translatie die het draaipunt (2,2) overbrengt naar de oorsprong, T_2 een rotatie is om de oorsprong, en T_3 de 'terugtranslatie' ($T_3 = T_1^{-1}$). Dat levert de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4a $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \text{ geeft } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ en dan } U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ geeft } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4b

$$\det(LU) = \det(L)\det(U) = 1 \cdot 4 = 4.$$

5a

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix} \neq c\,\mathbf{v},$$

dus $\mathbf{v}$ is **geen** eigenvector.

5b Op te lossen: $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dit gaat wel erg eenvoudig:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (3-2) & 1 & 1 & 0 \\ 1 & (3-2) & 1 & 0 \\ 1 & 1 & (3-2) & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dus er zijn twee vrije variabelen, en de algemene oplossing wordt:

$$x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2\mathbf{a}_1 + x_3\mathbf{a}_2.$$

Een basis voor de eigenruimte: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.

NORMEN

1a 2 pt.

1b 2 pt.

2a 3 pt.

2b 2 pt.

3a 2 pt.

3b 2 pt.

3c 2 pt. (voor 'verkeerde volgorde': 1 aftrekken)

4a 3 pt. waarvan **1** voor 'goede start' $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$,
1 voor vinden $\mathbf{y}$, en **1** voor vinden $\mathbf{x}$.

4b 2 pt. waarvan **1** voor productformule.

4c 2 pt.

5a 2 pt.

5b 3 pt. (indien niet expliciet een basis gegeven: 0.5 aftrek.)

cijfer := $\frac{1}{3} \cdot (\textbf{totaal} + 3)$, afgerond op geheel getal.