Deeltentamen Lineaire Algebra WI1105IN
28 juni 2007, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

Normering: opg.1: 4; opg.2: 4; opg.3: 3; opg.4: 6; opg.5: 10.

---

1. Bereken de (reële) eigenwaarden van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ en ga na of A diagonaliseerbaar is.

2. Ga na of de matrix $M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ een reguliere kansmatrix is.

Bereken ook de steady-state vector.

3. Bereken de kleinste-kwadratenoplossing van het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & = & 8 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & -2. \end{array} \right.$$

4. **a.** Geef de matrix A van de kwadratische vorm $4x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_3$.

b. Geef een *orthogonale* matrix Q en een diagonaalmatrix D waarvoor geldt $A = QDQ^{-1}$.

c. Geef een transformatie $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ zodat de kwadratische vorm geen 'kruistermen' y_iy_j met $i \neq j$ bevat. Hoe ziet die kwadratische vorm (in y_1, y_2, y_3) er dan uit?

Z.O.Z. voor opgave 5

5. Gegeven zijn $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$.

a. Bereken de dimensie van $W = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

b. Welke van de volgende vier vectoren zitten in de het orthogonale complement $W^\perp$ van W?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

c. Bereken de dimensie van $W^\perp$.

d. Bereken een orthogonale basis voor W.

e. Bereken de projectie $\hat{\mathbf{y}}$ van $\mathbf{y}$ op W.

f. Geef $\mathbf{w} \in W$ en $\mathbf{v} \in W^\perp$ zodat $\mathbf{y} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1 $\text{Det}(A-\lambda I) = (\lambda-2)\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 1 & (3-\lambda) \end{vmatrix} \ldots = (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+4) = (\lambda-2)^3$ heeft drievoudige e.w. $\lambda = 2$, en het is evident dat er niet drie onafhankelijke e.w. bij deze e.w. bestaan, dus A is niet diagonaliseerbaar.

2 M is regulier als $M^k > 0$ voor voldoende grote k. Voor de gegeven matrix geldt

$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 10 & 14 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 7 \\ 14 & 8 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Daaruit volgt dat M regulier is. Om de steady-state vector $\mathbf{q}$ te bepalen moet je oplossen $M\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$, oftewel $(M-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \boxed{1} & -8 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & 11 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & -11 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3 is vrij; $\mathbf{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Omdat $\mathbf{q}$ een kansvector is: $\mathbf{q} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

3 Kleinste-kwadratenoplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: los op: $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 3 & 26 \\ 3 & 6 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 14 & 3 & 26 \\ -25 & 0 & -50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Dus we vinden $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2/3 \end{bmatrix}$.

4a

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

4b Door te ontwikkelen naar de tweede kolom is snel in te zien dat

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$

A heeft de eigenwaarden $\lambda_{1,2} = 3,\ \lambda_3 = 8,\quad$ dus $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Eigenvectoren bij $\lambda_{1,2}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ dus eigenvectoren zijn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

De derde eigenvector moet hier loodrecht op staan (want A is symm.) dus kun je nemen $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Het enige wat nog hoeft te gebeuren om Q te krijgen is normeren: $Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

4c $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ levert $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T Q^T AQ\mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 3y_1^2 + 3y_2^2 + 8y_3^3$,
want uit $A = QDQ^{-1}$ volgt $D = Q^{-1}AQ = Q^T AQ$.

5a Even vegen: $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Er zijn twee pivots, in de eerste twee kolommen, dus $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ vormt een basis voor W, en $\dim W = 2$.

5b $\mathbf{v}_i$ ligt in $W^\perp$ als $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{a}_j$, voor $j = 1, 2$ (want dan automatisch ook $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{a}_3$ en dus $\mathbf{v}_i \perp c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3$). De eerste twee vectoren voldoen hier niet aan, $\mathbf{v}_3$ en $\mathbf{v}_4$ wel.

5c Voor $W \subset \mathbb{R}^n$ geldt $\dim W + \dim W^\perp = n$. Hier: $\dim W^\perp = 4 - 2 = 2$ (dus $\mathbf{v}_3$ en $\mathbf{v}_4$ vormen samen een basis).

5d Orthogonaliseren m.b.v. Gram-Schmidt, uitgaande van de basis $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 2/3 \\ 1 \\ -7/6 \end{bmatrix}$$

5e Dit kan met de zojuist gevonden orthogonale basis, waarbij ik voor het rekengemak $\mathbf{b}_2$ met 6 vermenigvuldig, dus $\mathbf{b}_2 = [-1\ \ 4\ \ 6\ \ -7]^T$ neem:

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \frac{27}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{51}{102}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Een andere mogelijkheid is via de kleinste kwadraten oplossing van het stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

5f Simpel! $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$