Test 1 Mathematical Structures AM1010
Monday October 4 2021, 9:00-10:00

TU Delft

- You are only allowed to use pen and paper; no calculators, books or other tools allowed.
- All answers have to provided with a proof/explanation unless otherwise specified.
- Please enter your final answers in the boxes provided.
  - If you do not have enough space in those boxes, use the extra box on the first page.
  - If that is full as well, ask an invigilator.
- Do not use the boxes provided as scratch paper; use the separate scratch paper. We will not grade your scratch paper. Bring it home with you or deposit it in the recycling bin.
- You can give your answers in English or in Dutch.
- The grade is (score+4)/4. It will count for 30% of your final grade.
- If you are entitled to extra time, your exam lasts until 10:10.

- De enig toegestane hulpmiddelen zijn pen en papier, dus geen rekenmachines, boeken, etc.
- Alle antwoorden moeten met uitleg/bewijs gegeven te worden, tenzij anders opgeschreven.
- Gelieve de antwoorden in de daartoe bestemde blokken op te schrijven.
  - Als de ruimte in een antwoordbox te klein is, gebruik dan de extra box aan het begin van het tentamen.
  - Als die extra box ook vol is, vraag hulp van een surveillant.
- Gebruik de antwoordboxen niet als kladpapier, daar heb je apart papier voor gekregen. We kijken je kladpapier niet na. Neem het mee naar huis of gooi het bij het oud papier.
- De vragen kunnen beantwoord worden in het Nederlands of het Engels.
- Het cijfer is (score+4)/4 en telt voor 30% van je eindcijfer.
- Indien je recht hebt op extra tijd duurt je tentamen tot 10:10.

1. Consider the statement / Beschouw de uitspraak

$$p \wedge (q \vee \sim p)$$

(a) Write down a truth table for this statement [no explanation necessary] 4
Geef een waarheidstabel voor deze uitspraak [geen uitleg noodzakelijk]

Solution.

p	q	p	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\sim p)$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	F	F
F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T

□

(b) Is this statement a tautology? Explain! 1
Is deze uitspraak een tautologie? Leg uit!

Solution. This is not a tautology as the statement is not always true (see the column under the $\wedge$). In fact this statement is equivalent to $p \wedge q$. □

2. Give the definition of the union $\bigcup_{j \in J} A_j$ over an index set. 3
Geef de definitie van de vereniging $\bigcup_{j \in J} A_j$ over een index-verzameling.

Solution. The union $\bigcup_{j \in J} A_j$ is the set containing all elements which are contained in at least one of the A_j.

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \{x \mid \exists j \in J : x \in A_j\}$$

Equivalently you can write

$$x \in \bigcup_{j \in J} A_j \Leftrightarrow \exists j \in J : x \in A_j$$

□

3. Consider the relation on $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ which is defined by xRy holds whenever $\frac{x}{y}$ is an integer.
Beschouw de relatie op $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gedefinieerd door xRy als $\frac{x}{y}$ een geheel getal is.

(a) Is the relation reflexive? Prove or disprove! 3
Is deze relatie reflexief? Bewijs of ontkracht!

Solution. The relation is reflexive. Let $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ be arbitrary. Then $\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{Z}$, so xRx holds. □

(b) Is the relation symmetric? Prove or disprove! 3
Is deze relatie symmetrisch? Bewijs of ontkracht!

Solution. The relation is not symmetric. Indeed $2R1$ as $\frac{2}{1} = 2$ is an integer, but not $1R2$ as $\frac{1}{2}$ is not an integer. □

(c) Is the relation transitive? Prove or disprove! 3
Is deze relatie transitief? Bewijs of ontkracht!

Solution. This relation is transitive. Let $x, y, z \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ be arbitrary. Suppose xRy and yRz hold. Then $k = \frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$ and $m = \frac{y}{z} \in \mathbb{Z}$. Therefore $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = km \in \mathbb{Z}$ as well. Thus xRz holds. □

(d) Is this an equivalence relation? Prove or disprove! 1
Is dit een equivalentierelatie? Bewijs of ontkracht!

Solution. This is not an equivalence relation as it is not symmetric. □

4. Consider the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defined by $f(x) = 2x + 3$.

Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x) = 2x + 3$.

(a) Show using the definition of injective that f is injective. 4
Laat met behulp van de definitie van injectief zien dat f injectief is.

Solution. Let $x, y \in \mathbb{R}$ be arbitrary. Suppose $f(x) = f(y)$, so $2x + 3 = 2y + 3$. This implies $2x = 2y$, so $x = y$. Therefore f is injective. □

(b) Show using the definition of surjective that f is surjective. 4
Laat met behulp van de definitie van surjectief zien dat f surjectief is.

Solution. Let $y \in \mathbb{R}$ be arbitrary. Take $x = \frac{y-3}{2}$. Then $f(x) = 2\frac{y-3}{2}+3 = (y-3)+3 = y$. Therefore f is surjective. □

5. Show that / Laat zien dat 6

$$(C \cap B) \setminus A \subseteq (C \setminus A) \cap (B \setminus A)$$

Solution. Suppose $x \in (C \cap B) \setminus A$. Then $x \in (C \cap B)$ and $x \notin A$. This means $x \in C$ and $x \in B$ and $x \notin A$. As $x \in C$ and $x \notin A$ we have $x \in C \setminus A$. As $x \in B$ and $x \notin A$ we have $x \in B \setminus A$. Therefore $x \in (C \setminus A) \cap (B \setminus A)$.

We conclude $(C \cap B) \setminus A \subseteq (C \setminus A) \cap (B \setminus A)$. □

6. Give an example of a set $A \subseteq \mathbb{R}$ and two increasing, surjective functions $f : A \to A$ and $g : A \to A$, such that their sum $f + g : A \to A$ is not surjective. Show your example works! 4

Geef een voorbeeld van een verzameling $A \subseteq \mathbb{R}$ en twee stijgende, surjectieve functies $f : A \to A$ en $g : A \to A$, zodat hun som $f + g : A \to A$ niet surjectief is. Laat zien dat je antwoord klopt!

Solution. We take $A = \mathbb{Z}$. Then consider $f(x) = g(x) = x$. Then f and g are the identity functions and thus increasing and surjective. However $f + g(x) = 2x$ is not surjective. Indeed the outcomes of $f + g$ are all even, and thus 1 is not in the range of $f + g$. □

Examiner resposible: Fokko van de Bult
Examination reviewers: The Math Structures team.