Bonus Test 1 Mathematical Structures
AM1010
Wednesday October 12 2022, 9:00-10:00

- You are only allowed to use pen and paper; no calculators, books or other tools allowed.
- All answers have to be provided with a proof/explanation unless otherwise specified.
- Please enter your final answers in the boxes provided.
  - If you do not have enough space in those boxes, use the extra box on the first page.
  - If that is full as well, ask an invigilator.
- Do not use the boxes provided as scratch paper; use the separate scratch paper.
  We will not grade your scratch paper. Bring it home with you or deposit it in the recycling bin.
- You can give your answers in English or in Dutch.
- The grade is (score+4)/4. It will count for at most 10% of your final grade (details see Brightspace) .
- If you are entitled to extra time, your exam lasts until 10:10.

- De enig toegestane hulpmiddelen zijn pen en papier, dus geen rekenmachines, boeken, etc.
- Alle antwoorden moeten met uitleg/bewijs gegeven te worden, tenzij anders opgeschreven.
- Gelieve de antwoorden in de daartoe bestemde blokken op te schrijven.
  - Als de ruimte in een antwoordbox te klein is, gebruik dan de extra box aan het begin van het tentamen.
  - Als die extra box ook vol is, vraag hulp van een surveillant.
- Gebruik de antwoordboxen niet als kladpapier, daar heb je apart papier voor gekregen.
  We kijken je kladpapier niet na. Neem het mee naar huis of gooi het bij het oud papier.
- De vragen kunnen beantwoord worden in het Nederlands of het Engels.
- Het cijfer is (score+4)/4 en telt voor maximaal 10% van je eindcijfer (details op Brightspace).
- Indien je recht hebt op extra tijd duurt je tentamen tot 10:10.

1. (a) Give the truth table for the expression / Geef de waarheidstabel voor de uitspraak **4**

$$(p \vee q) \wedge r \Rightarrow p \vee (q \wedge r)$$

(No explanation necessary / Geen uitleg vereist)

Solution. We have

p	q	r	$(p \vee q)$	$\wedge$	r	$\Rightarrow$	p	$\vee$	$(q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T	T	F
T	F	T	T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F	T	F	F	F

$\square$

(b) Is this expression a tautology? (Explain!) / Is deze uitspraak een tautologie? (Leg uit!) **2**

Solution. Yes, this is a tautology as the implication is true for all truth-values of the atoms p, q, r (see the column under $\Rightarrow$). $\square$

2. From the implication $p \Rightarrow q$ several other implications can be made which have a special name. What are these special names? **2**

Van de implicatie $p \Rightarrow q$ kunnen verscheidene andere implicaties gemaakt worden met speciale namen. Wat zijn deze speciale namen?

$q \Rightarrow p$ is called the/heet de ______ of/van $p \Rightarrow q$.

$\sim q \Rightarrow \sim p$ is called the/heet de ______ of/van $p \Rightarrow q$.

$\sim p \Rightarrow \sim q$ is called the/heet de ______ of/van $p \Rightarrow q$.

Solution. $q \Rightarrow p$ is called the converse of $p \Rightarrow q$

$\sim q \Rightarrow \sim p$ is called the contrapositive of $p \Rightarrow q$

$\sim p \Rightarrow \sim q$ is called the inverse of $p \Rightarrow q$ $\square$

3. Express the following statement using logical symbols: quantifiers and logical operators, but without words. Make everything explicit. **6**
Schrijf de volgende uitspraak op met logische symbolen: kwantoren en logische operators, geen woorden. Maak alles expliciet.

"Rich people are either smart or have a rich parent."
"Rijke mensen zijn of slim, of ze hebben een rijke ouder."

You can use the following notations / Je kunt de volgende uitspraken gebruiken

- $p(x)$ for the statement "person x is rich" / voor de uitspraak "persoon x is rijk"
- $q(x)$ for the statement "person x is smart" / voor de uitspraak "persoon x is slim"
- xRy for the relation "x is a parent of y" / voor de relatie "x is een ouder van y"
- P for the set of all people / voor de verzameling van alle mensen.

(No explanation necessary / Geen uitleg vereist)

Solution. Don't forget to add a universal quantifier at the front!

$$\forall x \in P : p(x) \Rightarrow (q(x) \vee (\exists y \in P : yRx \wedge p(y)))$$

□

4. Give an example of an injective function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which is neither increasing, nor decreasing (and explain why your example works). 6

A function is increasing if $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > y \implies f(x) > f(y)$ and decreasing if $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > y \implies f(x) < f(y)$.

Geef een voorbeeld van een injectieve functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die noch stijgend, noch dalend is (en leg uit waarom uw voorbeeld voldoet).

Een functie is stijgend als $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > y \implies f(x) > f(y)$ en dalend als $\forall x, y \in \mathbb{R} : x > y \implies f(x) < f(y)$.

Solution. We define

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ -e^x & x \geq 0 \end{cases}$$

This function is not increasing as $f(-1) = e^{-1} > -e = f(1)$. It is not decreasing as $f(-2) = e^{-2} < e^{-1} = f(-1)$.

The function is injective as if $(f(x) = f(y)$, then either $f(x) > 0$ or $f(x) < 0$.

- If $f(x) = f(y) > 0$, we have $x, y < 0$, in which case we have $e^x = e^y$ and $x = y$.
- If $f(x) = f(y) < 0$, we have $x, y \geq 0$, in which case we have $-e^x = -e^y$, so it follows again $x = y$.

Alternatively: Define

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

This function is not increasing as $f(1) = 1 > \frac{1}{2} = f(2)$. It is not decreasing as $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

The function is injective as if $(f(x) = f(y)$, then either $f(x) = 0$ or $f(x) \neq 0$.

- If $f(x) = f(y) = 0$, we have $x, y = 0$, in which case $x = y$.
- If $f(x) = f(y) \neq 0$, we have $f(x) = \frac{1}{x}$ and $f(y) = \frac{1}{y}$, in which case we have $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, so it follows again $x = y$.

□

5. Let A, B, and C be arbitrary sets, show that 6
Laat A, B en C willekeurige verzamelingen zijn, laat zien dat

$$(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subseteq B \setminus C$$

Solution. Let $x \in (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ be arbitrary. Then $x \in A \cup B$ and $x \notin A \cup C$. From $x \notin A \cup C$ we see that not ($x \in A$ or $x \in C$), that is $x \notin A$ and $x \notin C$.

From $x \in A \cup B$ we see that either $x \in A$ or $x \in B$. If $x \in A$, then we get a contradiction as also $x \notin A$. Thus $x \in B$. Therefore we know both $x \in B$ and $x \notin C$, so $x \in B \setminus C$.

We conclude $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subseteq B \setminus C$ as desired. □

6. Consider a relation on functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by fRg whenever
Beschouw een relatie of functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door fRg als

$$(f(1) - g(2))(f(2) - g(1)) \leq 0.$$

(a) Is R reflexive/reflexief? (Prove your answer! / Bewijs uw antwoord!) 2

Solution. This relation is reflexive. Indeed, let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be arbitrary. Then $(f(1)-f(2))(f(2)-f(1)) = -(f(1)-f(2))^2 \leq 0$ for any function, so fRf holds. □

(b) Is R symmetric/symmetrisch? (Prove your answer! / Bewijs uw antwoord!) 4

Solution. This relation is symmetric. Indeed, let $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be arbitrary functions and suppose fRg holds. Then $(f(1)-g(2))(f(2)-g(1)) \leq 0$, so $(g(1)-f(2))(g(2)-f(1)) = (f(2) - g(1))(f(1) - g(2)) = (f(1) - g(2))(f(2) - g(1)) \leq 0$ as well, so gRf holds as well. □

(c) Is R transitive/transitief? (Prove your answer! / Bewijs uw antwoord!) 4

Solution. This relation is not transitive. For example, take $f(x) = 10 - 3x$, $g(x) = 8 - x$, and $h(x) = 5x$. Then we have $(f(1) - g(2))(f(2) - g(1)) = (7 - 6)(4 - 7) = -3 \leq 0$, so fRg holds. Also $(g(1) - h(2))(g(2) - h(1)) = (7 - 10)(6 - 5) = -3 \leq 0$, so gRh holds. But $(f(1) - h(2))(f(2) - h(1)) = (7 - 10)(4 - 5) = 3 > 0$, so fRh does not hold. □

Examiner resposible: Fokko van de Bult
Examination reviewers: Anna Geyer.