Tentamen Lineaire Algebra WI1105IN
29 juni 2006, 9.00 – 12.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden.
U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.
Normering: opg. 1: 11 pt., opg.2: 8 pt, opg.3: 5 pt, opg.4: 5 pt, opg.5: 7 pt.

---

1. **a.** Gegeven is dat

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Bereken bases voor $\operatorname{Nul} A$, $\operatorname{Row} A$ en $\operatorname{Col} A$.
Geef ook de dimensie van $\operatorname{Nul} A^T$.

b. Bereken (zonder rekenmachine) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Tip: reken het antwoord nog een keer na!

c. Bepaal alle $\alpha \in \mathbb{R}$ waarvoor het stelsel $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 = 2 \end{cases}$ oplosbaar is.
Geef ook aan voor welke waarde(n) van α er oneindig veel oplossingen zijn.

2. **a.** Bereken de (reële) eigenwaarden van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ en ga na of A diagonaliseerbaar is.

b. Gegeven is de matrix $B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$.
Bereken $r \geq 0$ en een rotatiematrix R zodat $B = rR$.
Geef ook de rotatiehoek φ.

c. Bereken de kleinste-kwadratenoplossing van het stelsel

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = -4. \end{cases}$$

3. Gegeven zijn de volgende vier vectoren in $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a. Bereken de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op $W = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

b. Bereken een basis voor het orthogonale complement van W.
Bereken een vector $\mathbf{a}_4$ zodat $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ een orthogonale basis is voor $\mathbb{R}^4$. (Aanwijzing: gebruik het resultaat van het vorige onderdeel.)

4. **a.** Geef de matrix A van de kwadratische vorm

$$Q(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_3.$$

b. Ga na of de kwadratische vorm postief (semi)definiet, negatief (semi)definiet of indefiniet is. (Een kwadr. vorm is positief semidefiniet als $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ voor elke $\mathbf{x}$, en er een $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ is waarvoor $Q(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.

5. We bekijken een Markov proces met (kans)matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 2/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

a. Bereken de steady state (kans)vector $\mathbf{q}$.

b. Ga na dat $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$ eigenwaarden zijn van A.

c. Bereken exact (dus zonder afrondingen) $\mathbf{x}_{30}$ als het proces start vanuit de toestand $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3/6 \\ 2/6 \\ 1/6 \end{bmatrix}$.

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1a Nog één veegstap geeft $B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$. Daaruit volgen bases voor

Col A: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$, nl. de pivotkolommen,

Row A: de eerste drie rijen van E,

Nul A: $\{[-2,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0],\ [0,\ -2,\ 0,\ -1, 1]\}$ (Nul A = Nul E).

Tot slot: dim Nul A^T + dim Col $A^T = 4$ (= aantal kolommen van A^T),
dus dim Nul $A^T = 4 - 3 = 1$,

1b

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

1c

$$\left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 1 \\ 1-\alpha^2 & 0 & 2-\alpha \end{array}\right].$$

Als $\alpha^2 \neq 1$ dan zijn er twee pivots, dus is er een eenduidige oplossing; als $\alpha^2 = 1$, dus als $\alpha = \pm 1$ dan wordt de tweede rij van de aangevulde matrix $[\ 0\ 0 \mid 2 \pm 1\,]$, dus dan is het stelsel strijdig. (Kortom, voor geen enkele waarde van α zijn er oneindig veel oplossingen.)

2a $\text{Det}(A - \lambda I) = \ldots = \lambda^2 - 5\lambda - 2$ heeft evident twee reële nulpunten (namelijk, de functie is negatief voor $\lambda = 0$, en wordt positief als $\lambda \to \pm\infty$), dus A heeft twee onafhankelijk eigenvectoren, en is derhalve diagonaliseerbaar.

2b De kolommen hebben lengte $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$$B = 3\sqrt{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 3\sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos\frac{5}{4}\pi & -\sin\frac{5}{4}\pi \\ \sin\frac{5}{4}\pi & \cos\frac{5}{4}\pi \end{bmatrix}$$

2c Kleinste-kwadratenoplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: los op: $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 3 & 23 \\ 3 & 6 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 14 & 3 & 23 \\ -25 & 0 & -50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

3a Merk eerst op dat $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ orthogonaal is.

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{4}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{6}{2}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{0}{4}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\3\\3\end{bmatrix}$$

3b Aangezien $\dim W + \dim W^T = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ volgt dat $\dim W = 1$.

Snelste manier: neem $\mathbf{a}_4 = \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$. Dan is $\{\mathbf{a}_4\}$ de gevraagde basis.

4a

$$A = \begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\0 & 3 & 0\\-2 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

4b Door te ontwikkelen naar de tweede kolom is snel in te zien dat

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & -2\\0 & 3-\lambda & 0\\-2 & 0 & 7-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & -2\\0 & 0\\-2 & 7-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 24 = (3-\lambda)(\lambda-8)(\lambda-3)\end{aligned}$$

De eigenwaarden 3, 8 en 3 zijn allemaal positief, dus Q is positief definiet.

5a Dit is een (genormeerde) eigenvector bij eigenwaarde $\lambda = 1$:

$$[A - 1I|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c}-1/4 & 1/4 & 0 & 0\\1/4 & -2/4 & 1/4 & 0\\0 & 1/4 & -1/4 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right]$$

Eigenvectoren: alle veelvouden van $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, dus $\mathbf{q} = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{bmatrix}$.

5b We berekenen direct de eigenvectoren (die toch nodig zijn bij onderdeel **c.**).

$$[A - 3/4I|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1/4 & 0 & 0\\1/4 & -1/4 & 1/4 & 0\\0 & 1/4 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Dus een eigenvector bij $\lambda = \frac{3}{4}$: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, en net zo is $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ een eigenvector bij $\lambda = \frac{1}{4}$

5c Strategie: schrijf $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$; dan $\mathbf{x}_k = c_1 1^k \mathbf{v}_1 + c_2(\frac{3}{4})^k\mathbf{v}_2 + c_3(\frac{1}{4})^k\mathbf{v}_3$. Om $\mathbf{c}$ te vinden moet je oplossen het stelsel met aangevulde matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3/6\\1 & 0 & -2 & 2/6\\1 & -1 & 1 & 1/6\end{array}\right]$$

NORMEN

1a **5** pt. 1 punt voor echelonvorm, verder **1** punt per onderdeel
(als matrix worden gegeven i.p.v. vectoren: één keer 1 punt eraf.

1b **3** pt. eerste rekenfout: -1, tweede rekenfout: -2.

1c **3** pt. echelonvorm: **1** pt; $\alpha = \pm 1$: **1** pt; $\alpha \neq 1$: **1**

2a **3** pt. voor eigenwaarden: **2** pt.

2b **2** pt: **1** punt voor r en **1** punt voor φ.

2c **3** pt: **2** pt voor juiste aangevulde matrix.

3a **3** pt.

3b **2** pt.

4a **2** pt.

4b **3** pt. waarvan **2** voor eigenwaarden.

5a **2** pt. indien niet genormeerd: 0.5 eraf

5b **2** pt.

5c **3** pt. 2 pt voor eigenvectoren (evt. al bij **b.** bepaald) bij 2 resp. 1.
indien niet expliciet een basis gegeven: geen aftrek.

cijfer := $\frac{1}{4} \cdot (\textbf{totaal} + 4)$**, afgerond op geheel getal.**