Deeltentamen Lineaire Algebra WI1105IN
3 april 2006, 9.00 – 11.00 uur

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands. Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en niet verboden. U dient bij berekeningen wel de tussenstappen op papier te vermelden.

---

1. Gegeven zijn de volgende vijf vectoren in $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Bereken een basis voor $H = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3\}$, en ga na of $\mathbf{b}$ in H ligt.

2. Bereken de inverse van de matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. De afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bestaat uit de rotatie R om de oorsprong over een hoek $\frac{1}{4}\pi$, gevolgd door een translatie over de vector $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

a. Geef de $(2{\times}2)$ matrix A die bij de rotatie R hoort.

b. Geef de matrix B die de afbeelding T in homogene coördinaten beschrijft.

4. Gegeven zijn de LU-ontbinding van een matrix A en een vector $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a. Los de vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op *zonder* eerst het product uit te rekenen.

b. Bereken de determinant van A.

c. Bereken – eveneens zonder het product uit te rekenen – de determinant van $3A$.

5. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a. Ga na of de vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van A.

b. Toon aan dat $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$.

c. Geef alle eigenwaarden van A, en geef bases voor elk van de bijbehorende eigenruimten

ANTWOORDEN + UITWERKINGEN

1 Vegen geeft

$$[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4\ \mathbf{b}] \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daaruit volgt: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ is een basis voor H, en $\mathbf{b}$ ligt, vanwege de pivot in de vijfde kolom, niet in H.

2 De standaard aanpak: $[A|I]$ reduceren tot $[I|B]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Het antwoord wordt: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3a $R = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{4}\pi & -\sin\frac{1}{4}\pi \\ \sin\frac{1}{4}\pi & \cos\frac{1}{4}\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

3b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4a $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \text{ geeft } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ en dan } U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ geeft } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

4b

$$\det(LU) = \det(L)\det(U) = 1 \cdot 4 = 4.$$

4c

$$\det(3A) = \det(3I \cdot A) = \det(3I)\det(A) = 3^4\det(A) = 324.$$

5a

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{bmatrix} \neq c\,\mathbf{v},$$

5b Begin trek eerste rij twee keer van derde rij af en haal factor $2-\lambda$ naar buiten:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -1-\lambda & 3 \\ 4 & 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -1-\lambda & 3 \\ -4+2\lambda & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -1-\lambda & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = -(\lambda-2)^2(\lambda+1).$$

5c De eigenwaarden zijn $\lambda = 2$ en $\lambda = -1$, namelijk, de nulpunten van het karakteristieke polynoom $\det(A - \lambda I)$.
Eigenruimte bij $\lambda = 2$ is de nulruimte van $A - 2I$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4-2 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & -1-2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & -3 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dus een basis voor de eigenruimte is (neem x_2 en x_3 als vrije variabelen):

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Net zo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4-(-1) & 1 & -1 & 0 \\ -6 & -1-(-1) & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -(-1) & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dus eigenvectoren bij $\lambda = -1$ zijn veelvouden van $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

NORMEN

1 4 pt. waarvan **2** voor vegen en 2 keer **1** voor conclusies

2 3 pt.

3a 2 pt.

3b 2 pt. (voor 'verkeerde volgorde': 1 aftrekken)

4a 4 pt. waarvan **1** voor 'goede start' $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$,

4b 2 pt. waarvan **1** voor productformule.

4c 2 pt.

5a 2 pt.

5b 2 pt.

5c 4 pt. waarvan **1** voor eigenwaarden en **2** en **1** voor e.v.n bij 2 resp. 1.
indien niet expliciet een basis gegeven: geen aftrek.

cijfer := $\frac{1}{3} \cdot (\textbf{totaal} + 2)$**, afgerond op geheel getal.**