Tentamen Complexe Functietheorie AM2040

26 juni 2023, 13:30–16:30

TU Delft

- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden. Opgaven uit het boek mogen niet als referentie gebruikt worden.
- Cijfer=(Aantal punten+4)/4

---

(6) 1. Bepaal alle analytische functies $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die voldoen aan

$$\mathrm{Re}(f(x+iy)) = e^{-y}\cos(x) + x^2 - y^2 + 2y.$$

Schrijf f als functie van z.

(4) 2. g is een gehele functie die voldoet aan

$$|g(z)| \leq 1 + 2|z|^{\frac{\pi}{3}}, \qquad \text{voor alle } z \in \mathbb{C}.$$

Bewijs dat er constanten $a, b \in \mathbb{C}$ bestaan zo dat $g(z) = az + b$.

3. De functie f wordt gegeven door $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

(2) a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks van f rond $z = 1$.

(4) b) Bepaal de Laurentreeks van f rond $z = -i$ die convergeert in $z = 4i$.

4. De functie g wordt gegeven door

$$g(z) = \frac{2z - i}{(\cosh(\pi z))^2}.$$

(5) a) Bepaal alle geïsoleerde singulariteiten van g in $\mathbb{C}$ en bepaal van iedere singulariteit het type (ophefbaar, pool en orde van de pool, essentieel).

(2) b) Wat is het type van de singulariteit in $z = \frac{1}{2}i$ van $g(z)e^{\frac{1}{z-\frac{1}{2}i}}$? Verklaar je antwoord.

(8) 5. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx.$$

(1) 6. a) Formuleer de Stelling van Rouché.

(4) b) Laat zien dat de vergelijking

$$3e^{-z} = z - 2023$$

precies één oplossing heeft in $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Examiner: W. Groenevelt

Exam reviewer: J. de Groot

Exam Complex Function Theory AM2040
26 June 2023, 13:30–16:30

- All answers must be motivated. Exercises from the book can not be used as a reference.
- Grade=(points obtained+4)/4

---

(6) 1. Determine all analytic functions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ that satisfy

$$\mathrm{Re}(f(x+iy)) = e^{-y}\cos(x) + x^2 - y^2 + 2y.$$

Write f as a function of z.

(4) 2. g is an entire function such that

$$|g(z)| \leq 1 + 2|z|^{\frac{\pi}{3}}, \qquad \text{for all } z \in \mathbb{C}.$$

Prove there exist constants $a, b \in \mathbb{C}$ such that $g(z) = az + b$.

3. The function f is given by $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

(2) a) Determine the radius of convergence of the power series of f at $z = 1$.

(4) b) Determine the Laurent series of f at $z = -i$ that converges in $z = 4i$.

4. The function g is given by

$$g(z) = \frac{2z - i}{(\cosh(\pi z))^2}.$$

(5) a) Determine all isolated singularities of g in $\mathbb{C}$ determine for each singularity its type (removable, pole and order of the pole, essential).

(2) b) What is the type of the singularity in $z = \frac{1}{2}i$ of $g(z)e^{\frac{1}{z-\frac{1}{2}i}}$? Explain your answer.

(8) 5. Calculate the improper integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\,dx.$$

(1) 6. a) Formulate Rouché's Theorem.

(4) b) Show that the equation

$$3e^{-z} = z - 2023$$

has exactly one root in $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Examiner: W. Groenevelt
Exam reviewer: J. de Groot