

Exam Complex Function Theory AM2040

21 June 2024, 13:30–16:30



-
- All answers must be motivated. Exercises from the book can not be used as a reference, except for l'Hôpital's rule.
 - Grade=(points obtained+4)/4
-

- (4) 1. Determine all $z \in \mathbb{C}$ for which the identity $\text{Log}(e^z) = z + 2024\pi i$ is valid.
- (5) 2. The function f is analytic on a region Ω , and $\bar{f}$ is also analytic on Ω . Using the Cauchy-Riemann equations, show that f is constant on Ω .
- (5) 3. The function $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is analytic, γ is a simple closed path with positive orientation and z_0 is a point in the interior of γ . The function $G : \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ is given by

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w-z)(w-z_0)} dw.$$

Use the (generalized) Cauchy integral formula to express $G(z)$ in terms of g and its derivatives $g^{(n)}$. Distinguish between the following three cases: 1) $z = z_0$; 2) $z \neq z_0$ and z in the interior of γ ; 3) z not in the interior of γ .

4. The function f is given by

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{(\cos(z) - 1) \sin(\pi z)}.$$

- (7) a) Determine all isolated singularities of f in $\mathbb{C}$, and determine for each singularity its type (removable, pole and order of the pole, essential).
- (2) b) Determine the radius of convergence of the Taylor series of f at the point $2 + i$.

- (5) 5. Calculate

$$\int_{C_2(i)} (z+i)^3 e^{\frac{1}{z^3}} dz$$

where $C_2(i)$ has positive orientation.

- (8) 6. For $0 < \alpha < 1$ show that

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Hint: First apply an appropriate substitution.

Examiner: W. Groenevelt

Exam reviewers: J. de Groot, C. Wagenaar

- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden. Opgaven uit het boek mogen niet als referentie gebruikt worden, behalve de regel van l'Hôpital.
- Cijfer=(Aantal punten+4)/4

- (4) 1. Bepaal alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt dat $\text{Log}(e^z) = z + 2024\pi i$.
- (5) 2. De functie f is analytisch op een gebied Ω , en $\bar{f}$ is ook analytisch op Ω . Laat met behulp van de Cauchy-Riemann vergelijkingen zien dat f constant is op Ω .
- (5) 3. De functie $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is analytisch, γ is een enkelvoudig gesloten pad met positieve oriëntatie en z_0 is een punt binnen γ . De functie $G : \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ wordt gegeven door

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w-z)(w-z_0)} dw.$$

Gebruik de (gegeneraliseerde) integraalformule van Cauchy om $G(z)$ uit te drukken in termen van g en afgeleiden $g^{(n)}$. Onderscheid de volgende drie gevallen: 1) $z = z_0$; 2) $z \neq z_0$ en z ligt binnen γ ; 3) z ligt buiten γ .

4. De functie f wordt gegeven door

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{(\cos(z) - 1) \sin(\pi z)}.$$

- (7) a) Bepaal alle geïsoleerde singulariteiten van f in $\mathbb{C}$ en bepaal van iedere singulariteit het type (ophefbaar, pool en orde van de pool, essentieel).
- (2) b) Bepaal de convergentiestraal van de Taylorreeks van f rond het punt $2 + i$.

- (5) 5. Bereken

$$\int_{C_2(i)} (z+i)^3 e^{\frac{1}{z^3}} dz$$

waarbij $C_2(i)$ positieve oriëntatie heeft.

- (8) 6. Voor $0 < \alpha < 1$ laat zien dat

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Hint: Gebruik eerst een geschikte substitutie.

Examiner: W. Groenevelt

Exam reviewers: J. de Groot, C. Wagenaar