

Exam Markov Processes AM2570
April 14, 2023, 13:30–16:30

- Every answer must be supplemented by adequate derivation, explanation and/or calculation, or it will receive no credit; write a mini-story in which you explain the steps that lead you to the answer. You may write yours answers in Dutch or English.
- Every part of every question has the same weight (10 points); there are 9 parts; you get 10 points “for free” (so in total there are 100 points).

1. A cell culture is started with one red cell at time 0. After one minute the red cell dies and in this process two new cells are born according to the following probability distribution:

Color configuration	Probability
2 red cells	$\frac{1}{4}$
1 red cell + 1 white cell	$\frac{2}{3}$
2 white cells	$\frac{1}{12}$

The above procedure is repeated minute after minute for any red cell present in the culture. On the other hand, the white cells can only live for one minute, and disappear after that without reproducing. We assume that the cells behave independently.

- a. Let W_n be the number of *white* cells in the n th generation (i.e. the number of white cells present directly after the n th minute and before the $n+1$ -th minute). So $W_0 = 0$. Determine $E[W_1]$ and $E[W_2]$.
 - b. Compute the extinction probability e of the whole cell culture.
2. Let $(X_n)_{n \geq 0}$ be a discrete time Markov chain on the state space $S = \{0, 1, 2, 3\}$, with matrix of transition probabilities $P = (p_{i,j})$ given by

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Let $T_3 = \inf\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid X_n = 3\}$, and for $k \in S$ we define $h_3(k)$ as:

$$h_3(k) = E[T_3 \mid X_0 = k], \quad \text{for } k \in S.$$

- a. Obviously we have that $h_3(3) = 0$ (*why?*). Show that the *Partition theorem* yields that:

$$h_3(0) = 1 + \frac{1}{2}h_3(0) + \frac{1}{2}h_3(2). \quad (1)$$

- b. Determine¹ $h_3(0)$.

3. Mr. De Vries possesses r umbrellas (with $r \geq 1$) which he uses in going from home to the university in the morning when it rains, or in the evening from the university to home, also only when it rains. If there is **no** rain (and this applies both to the morning and to the evening), Mr. De Vries will **not** use any of his umbrellas. Of course, if there is no umbrella

¹*Hint:* find expressions for $h_3(1)$ and $h_3(2)$ similar to the expression for $h_3(0)$ from (1). You don't need to prove these expressions. Then solve for $h_3(0)$.

and it rains, he will go to the university (in the morning; home in the evening) without an umbrella. If it is not raining he never takes an umbrella. Assume that, independent of the past, it rains in the morning (evening) with probability p (where $0 < p < 1$).

- a. Define a Markov chain with $r+1$ states which will help us to determine the proportion of the travel time Mr. De Vries gets wet (note that he gets wet if it rains when he goes to the university or home, and all umbrellas are at the other location). What is the matrix P of transition probabilities?

Hint: Let the state $i \in S$ be the number of umbrellas Mr. De Vries has at his present location (just before leaving his house/the university). So the other location has at that moment $r-i$ umbrellas. But then we have² that:

$$p_{0,r} = 1, \quad p_{i,r-i} = \dots??\dots, \quad p_{i,r-i+1} = \dots??\dots$$

and $p_{i,j} = \dots??\dots$ for all other $i, j \in S$.

- b. Let $\pi = (\pi_0 \pi_1 \dots \pi_r)$ be the invariant distribution. As usual, set $q = 1 - p$. Then π satisfies:

$$\pi_0 = \frac{q}{r+q}, \quad \pi_i = \frac{1}{r+q}, \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, r.$$

*Why???*³ Also, what fraction of the travel time does Mr. De Vries gets wet?

4. Let $(X_n)_{n \geq 0}$ be a Markov chain on state space $S = \{A, B, C\}$, with matrix of transition probabilities $P = (p_{i,j})$ given by

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and initial distribution $\lambda_0 = (\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3})$. Consider the function $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, defined by $f(A) = f(B) = 0$ and $f(C) = 1$. Define the process $(Y_n)_{n \geq 0}$ by $Y_n = f(X_n)$, for $n \geq 0$.

- a. Determine for $i, j \in S_Y = \{0, 1\}$: $P(Y_1 = j | Y_0 = i)$.

- b. Is $(Y_n)_{n \geq 0}$ a Markov chain?

Hint: determine $P(Y_2 = 0 | Y_1 = 0, Y_0 = 0)$ and $P(Y_2 = 0 | Y_1 = 0, Y_0 = 1)$; what conclusions do you draw?

5. A small workshop consists of two machines and two repairmen. Each machine can work until failure at an exponentially distributed random time with parameter 0.2. A failed machine can be repaired only by a single repairman, within an exponentially distributed random time with parameter 0.25. We model the number $X(t)$ of working machines at time $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, as a continuous-time Markov process. Repair times and breaking down times are all independent.

Calculate the long-run probability distribution $\pi = (\pi_0 \pi_1 \pi_2)$ of $X(t)$. Given that a working machine can produce 100 units every hour, what is the expected number of units the system can produce per hour in the long run?

The End

²Please fill out the dots and write down P .

³So you need to show that π is the invariant distribution, but you don't need to derive it. It is given to you!

Tentamen Markov Processen AM2570
14 April, 2023, 13:30–16:30

- Elk antwoord moet gegeven worden met een goede afleiding, uitleg en/of berekening; het zal anders geen punten opleveren. Schrijf dus een klein ‘verhaaltje’ waarin je uitlegt hoe je aan je antwoord gekomen bent. Het antwoord mag in het Nederlands of Engels gegeven worden.
 - Elk onderdeel van elke vraag heeft hetzelfde gewicht (10 punten); er zijn in totaal 9 onderdelen; de resterende 10 punten zijn bonus (dus er zijn in totaal 100 punten).
-

1. Een cel-cultuur begint met één rode cel op tijdstip $n = 0$. Na 1 minuut sterft de oorspronkelijke cel en worden twee nieuwe cellen geboren volgens de volgende kansverdeling:

Kleur van de twee cellen	Kansen
2 rode cellen	$\frac{1}{4}$
1 rode cel + 1 witte cel	$\frac{2}{3}$
2 witte cellen	$\frac{1}{12}$

Dit proces herhaald zich na elke minuut voor elke rode cel in de cel-cultuur. Echter, witte cellen leven 1 minuut en sterven dan zonder zich voort te planten. Alle cellen reproduceren onafhankelijk van elkaar.

- Laat W_n het aantal *witte* cellen zijn in de n th generatie (dus het aantal witte cellen aanwezig direct na de n -de minuut en vóór de $n+1$ -ste minuut). Dus $W_0 = 0$. Bepaal dan $E[W_1]$ en $E[W_2]$.
 - Bepaal de kans e dat de cel-cultuur uiteindelijk zal uitsterven.
2. Laat $(X_n)_{n \geq 0}$ een discrete tijd Markov keten zijn op de toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3\}$, waarbij de matrix van overgangskansen $P = (p_{i,j})$ gegeven wordt door:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laat $T_3 = \inf\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid X_n = 3\}$, en voor $k \in S$ definiëren we $h_3(k)$ door:

$$h_3(k) = E[T_3 \mid X_0 = k], \quad \text{for } k \in S.$$

- Het is duidelijk dat $h_3(3) = 0$ (waarom trouwens?). Laat met behulp van de *Partition theorem* zien dat er geldt dat:

$$h_3(0) = 1 + \frac{1}{2}h_3(0) + \frac{1}{2}h_3(2). \quad (1)$$

- Bepaal¹ $h_3(0)$.

¹*Hint:* bepaal uitdrukkingen voor $h_3(1)$ en $h_3(2)$ vergelijkbaar met de uitdrukking voor $h_3(0)$ uit (1). U hoeft deze uitdrukkingen niet te bewijzen. Met deze 3 uitdrukkingen kunt u dan $h_3(0)$ bepalen.

3. Meneer De Vries heeft r paraplu's (waarbij $r \geq 1$) waarvan hij er één gebruikt 's ochtends als het regent als hij van huis naar de universiteit gaat, of 's avonds als het regent als hij van de universiteit naar huis gaat. Als het 's ochtends (of 's avonds) droog is neemt hij geen paraplu mee. Vanzelfsprekend, als het regent als hij naar het werk of naar huis gaat, en er is geen paraplu aanwezig bij vertrek zal hij zonder paraplu naar de universiteit (of naar huis) gaan. Ook als het droog is neemt hij nooit een paraplu mee. U mag verder aannemen, dat onafhankelijk van het verleden, het 's ochtends (en ook 's avonds) zal regenen met kans p (met $(0 < p < 1)$).

- a. Definieer een Markov keten met $r + 1$ toestanden die ons zal helpen om te bepalen welk deel van de reistijd De Vries nat zal regenen (merk op, dat hij alleen nat zal regenen als hij van huis of van de universiteit vertrekt als het regent en alle paraplu's op de andere locatie zijn). Wat is de matrix van overgangskansen P ?

Hint: Laat de toestand $i \in S$ het aantal paraplu's zijn die De Vries op zijn huidige locatie heeft (net voordat hij zijn huis/de universiteit verlaat). Dus op dat moment zijn er $r - i$ paraplu's op de andere locatie. Maar dan geldt er dat²

$$p_{0,r} = 1, \quad p_{i,r-i} = \dots??\dots, \quad p_{i,r-i+1} = \dots??\dots$$

en $p_{i,j} = \dots??\dots$ voor alle andere $i, j \in S$.

- b. Laat $\pi = (\pi_0 \pi_1 \dots \pi_r)$ de invariante verdeling zijn. Laat $q = 1 - p$. Dan voldoet π aan:

$$\pi_0 = \frac{q}{r+q}, \quad \pi_i = \frac{1}{r+q}, \quad \text{voor } i = 1, 2, \dots, r.$$

*Waarom is π de invariante verdeling?*³ Welk deel van de reistijd zal Meneer De Vries nat regenen?

4. Laat $(X_n)_{n \geq 0}$ een Markov keten zijn op de uitkomstenruimte $S = \{A, B, C\}$, waarbij de matrix van overgangskansen $P = (p_{i,j})$ gegeven wordt door:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en waarbij $\lambda_0 = (\frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3})$ de beginverdeling is. Beschouw de functie $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door: $f(A) = f(B) = 0$ en $f(C) = 1$. Definieer het proces $(Y_n)_{n \geq 0}$ door $Y_n = f(X_n)$, voor $n \geq 0$.

- a. Bepaal voor $i, j \in S_Y = \{0, 1\}$ de volgende overgangskansen: $P(Y_1 = j | Y_0 = i)$.
b. Is $(Y_n)_{n \geq 0}$ een Markov keten?

Hint: Bepaal $P(Y_2 = 0 | Y_1 = 0, Y_0 = 0)$ en $P(Y_2 = 0 | Y_1 = 0, Y_0 = 1)$; wat is uw conclusie?

5. Een kleine werkplaats bestaat uit twee machines en twee monteurs. Elk van de machines zal na een exponentieel verdeelde tijd met parameter 0.2 kapot gaan. Een kapotte machine zal door één monteur gerepareerd worden, en deze heeft daar een exponentieel verdeelde tijd met parameter 0.25 voor nodig. We modelleren het aantal werkende machines $X(t)$

²Svp. de kansen op de stippelijnen invullen, en dan P opschrijven.

³Dus u moet laten zien dat π de invariante verdeling is, maar u hoeft π dus niet af te leiden. Zij is al aan u gegeven!

op tijdstip $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, als een continue-tijd Markov keten. Reparatie tijden en de lengte van de tijd waarin elk van de machines kapot gaat zijn allemaal onafhankelijk van elkaar.

Bereken de invariante kansverdeling $\pi = (\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2)$ van $X(t)$. Als gegeven is dat een werkende machine 100 producten per uur kan maken, wat is dan op de lange duur het verwachte aantal producten per uur dat door deze workshop geproduceerd zal worden?

The End/klaar