

Midterm Introduction to Probability theory,
26 Mei 2021, 09:00-11.00,
Docent: R.C. Kraaij

- De tweede lezer is Cor Kraaikamp.
- De midterm moet gemaakt worden met blauwe of zwarte pen.
- Bij het tentamen mag het boek en een A4, tweezijdig, met pen beschreven aantekeningen gebruikt worden. Daarnaast mag een niet grafisch rekenmachine gebruikt worden.
- De midterm bestaat uit 4 vragen met in totaal 11 deelvragen. Elke deelvraag is 2 punten waard.
- Formules voor verwachting en variantie van bekende verdelingen, zoals de binomiaal en Poisson verdeling mogen ingezet worden zonder verdere verklaring. Resultaten uit eerdere deelvragen mogen bij latere deelvragen ingezet worden.

Exercise 1. Laat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ een kansruimte. Je mag gebruiken dat als $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$ en $C_1 \subseteq C_2$, dan $\mathbb{P}[C_1] \leq \mathbb{P}[C_2]$.

- (a) Laat $A, B \in \mathcal{F}$ en neem aan dat $\mathbb{P}[A] = 1$. Bewijs dat $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[B]$.
- (b) Laat $C, D \in \mathcal{F}$ zodat C onafhankelijk is van zichzelf. Bewijs dat C en D onafhankelijk zijn.

Exercise 2. Je gooit twee zuivere dobbelstenen. Noem hun uitkomsten D_1 en D_2 . Dus:

$$\mathbb{P}[D_i = j] = \frac{1}{6}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, 6\},$$

waarbij D_1 en D_2 onafhankelijk zijn. Noem de som van de ogen $S := D_1 + D_2$.

- (a) Laat zien dat $\{S = 7\}$ onafhankelijk is van $\{D_1 = j\}$ voor alle $j \in \{1, \dots, 6\}$.
- (b) Zijn S en D_1 onafhankelijk? Bewijs of ontkracht dit.
- (c) Bereken $\mathbb{E}[SD_1]$.

Exercise 3. Bekijk de situatie in het volgende figuur, waar een wandelaar doorheen gaat lopen door elke tijdstap een van de pijlen te volgen.



We modelleren dit als volgt. Laat Z_n de positie van de wandelaar op tijd n . We modelleren nu welke richting we op gaan lopen op tijd n . Laat $p \in (0, 1)$ en laat $\{X_1, X_2, \dots\}$ onafhankelijke stochasten (en onafhankelijk van de Z_n) met gelijke verdeling zo dat

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{met kans } p, \\ -1 & \text{met kans } 1 - p. \end{cases}$$

Dan hebben we:

$$Z_{n+1} = \begin{cases} Z_n + X_n & \text{als } Z_n \in \{1, 2\}, \\ Z_n & \text{als } Z_n \in \{0, 3\}. \end{cases}$$

- (a) Bereken de kans $\mathbb{P}[Z_{n+2} = 1 | Z_n = 1]$.

- (b) Stel dat de wandelaar begint in 1, dus $Z_0 = 1$. Laat Y de eerste n zijn zo dat $Z_{2n} \neq 1$. Wat is het type verdeling van Y ? Wat is/zijn de parameter(s) van deze verdeling? Hoe relateert dat tot het antwoord van (a)? (Indien je het antwoord van (a) niet weet; noem het antwoord van (a) dan r en druk je antwoord uit in termen van r).

Noem $h_k = \mathbb{P}[\exists n : Z_n = 3 | Z_0 = k]$ de kans dat men ooit in 3 terecht komt (en blijft) als de wandelaar in k start. We weten dus dat $h_0 = 0$ en $h_3 = 1$.

- (c) Druk h_1 uit in termen van h_0 en h_2 , en druk h_2 uit in termen van h_1 en h_3 . Bereken hiermee h_1 .

Exercise 4. Laat X een geometrische stochast met parameter p . Laat Y_i een Poisson stochast met parameter i , dus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X = i] &= p(1-p)^{i-1}, & i \in \{1, 2, \dots\}, \\ \mathbb{P}[Y_i = k] &= \frac{i^k}{k!} e^{-i}, & i \in \{1, 2, \dots\}, k \in \{0, 1, 2, \dots\},\end{aligned}$$

waarbij alle stochasten onafhankelijk van elkaar zijn.

Definieer Z op de volgende conditionele manier:

$$Z = Y_i \text{ wanneer } X = i.$$

Als gevolg hebben we onder andere dat: $\mathbb{P}[Z = k | X = i] = \mathbb{P}[Y_i = k]$. Je mag dit resultaat, als wel de volgende formule in de opgave gebruiken:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{wanneer } |x| < 1.$$

- (a) Bereken de kans dat $\mathbb{P}[Z = 1]$ en $\mathbb{P}[X = 1 | Z = 1]$.
 (b) Laat zien dat de kansgenererende functie van Z gegeven is door

$$G_Z(s) = \frac{pe^{s-1}}{1 - (1-p)e^{s-1}}$$

op een passend interval.

- (c) Bereken $\mathbb{E}[Z]$.