

Tentamen IN2505-B Berekenbaarheidstheorie

29 juni 2011, 14.00–17.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 1.
- Het maximaal aantal te behalen punten: 50.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 10 punten op.
- Het eindcijfer wordt bepaald door afronding van $\frac{9}{50} \cdot (\text{aantal punten}) + 1$ op een geheel of half cijfer.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen niet toegestaan.
- Eveneens is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines niet toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer uw antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (gebruik eerst kladpapier).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- Voordat u uw antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje uw naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.

1. (a) (2 punten) Definieer wanneer een Turingmachine M een *opsommer* (Eng.: enumerator) van een taal L wordt genoemd.
- (b) (2 punten) Stel dat M een *niet-deterministische* Turingmachine is die een taal L *beslist* (Eng.: decides) en stel dat w een invoerwoord voor M is. Beschouw de volgende uitspraak:

Als $w \in L$, dan eindigen alle mogelijke *berekeningsgeschiedenissen* (Eng.: computation histories) van M op w in een *accepterende configuratie* (Eng.: accepting configuration).

Ga na of deze uitspraak juist of onjuist is, en beargumenteer uw antwoord.

- (c) (6 punten) Construeer een niet-deterministische Turingmachine die de taal

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is geen priemgetal}\}$$

beslist. Een *high-level description* volstaat hierbij. Leg uit hoe deze Turingmachine gebruik maakt van niet-determinisme.

2. (a) (3 punten) Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die niet *injectief* (Eng.: one-to-one) maar wel *surjectief* (Eng.: onto) is.
- (b) (7 punten) Beschouw de volgende verzameling functies:

$$V = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \text{ geldt } n \leq f(n) \leq n + 3\}$$

Ga na of V aftelbaar is of niet en geef een bewijs van uw opvatting.

3. (a) (3 punten) Geef een precieze beschrijving van het *Halting Problem* als verzameling.
- (b) (7 punten) Bewijs met behulp van een *directe reductie* dat het probleem:

$$CF_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een Turingmachine en } L(M) \text{ is contextvrij (Eng.: context-free)}\}$$

niet *beslisbaar* (Eng.: decidable) is.

4. Beschouw het volgende probleem:

$$NEQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1 \text{ en } M_2 \text{ zijn Turingmachines zodanig dat } L(M_1) \neq L(M_2)\}$$

Bewijs met behulp van een *mapping reduction* dat NEQ_{TM} *niet Turingherkenbaar* (Eng.: Turing-recognizable) is. Uw bewijs dient daarbij uit 2 delen te bestaan:

- (a) (5 punten) Een beschrijving van de *reductie(functie)* f .
- (b) (5 punten) Het bewijs dat deze f inderdaad aan de eisen van een mapping reduction voldoet.

5. (10 punten) Beschouw het volgende probleem:

$$E = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een Turingmachine, zodanig dat } M \text{ alle } w \in L(M) \text{ accepteert in meer dan } |w| \text{ stappen, en anders niet termineert}\}.$$

Hierin staat $|w|$ voor de lengte van het woord w . Bewijs met behulp van de *recursiestelling* (Eng.: recursion theorem) dat E niet *beslisbaar* (Eng.: decidable) is.