

Tentamen IN2505-II Berekenbaarheidstheorie

27 augustus 2009, 14.00–17.00 uur

- Dit tentamen bestaat uit 5 open vragen.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 1.
- Het maximaal aantal te behalen punten: 50.
- Alle vragen tellen even zwaar mee en leveren ieder maximaal 10 punten op.
- Het eindcijfer wordt bepaald door afronding van $\frac{9}{50} \cdot (\text{aantal punten}) + 1$ tot een geheel getal.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen niet toegestaan.
- Eveneens is het gebruik van grafische of niet-grafische rekenmachines niet toegestaan.
- Uiteraard komen in één tentamen niet alle onderwerpen aan bod. Trek daarom op basis van dit tentamen geen conclusies over stof die nooit getoetst wordt.
- Formuleer uw antwoord in correct Nederlands of Engels en schrijf leesbaar (gebruik eerst kladpapier).
- Geef geen irrelevante informatie. Dit kan leiden tot puntenaftrek.
- Voordat u uw antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje uw naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.

1. (a) (2 punten) Zij M een *niet-deterministische* Turingmachine die een taal L *beslist* en zij w een invoerwoord voor M . Beschouw de volgende uitspraak:

Als $w \in L$, dan eindigen alle paden in de berekeningsboom van M op w in een accepterende configuratie.

Ga na of deze uitspraak juist of onjuist is, en beargumenteer uw antwoord.

- (b) Beschouw de volgende taal over het alfabet $\{a, b\}$:

$$L = \{w \mid w \text{ bevat een deelwoord van de vorm } a^m b^m \text{ met } m > 1\}.$$

Bijvoorbeeld, $aaabbaaab \in L$ (vanwege deelwoord $aabb$, met $m = 2$) en $ababbab \notin L$.

Beschouw de volgende *high-level description* van een Turingmachine M :

$M =$ "Op invoerwoord w :

1. Gok een woord v van de vorm $a^m b^m$ met $m > 1$.
2. Check of v een deelwoord is van w .
3. Zo ja, *accepteer*; zo neen, *verwerp*."

- i. (2 punten) Geef een *implementation description* van stap 1. van M .
- ii. (6 punten) Is M een niet-deterministische *beslisser* (Eng.: decider) van L ? Licht toe.

2. (a) (3 punten) Geef een definitie van het begrip *injectieve functie* (Eng.: a function that is one-to-one).

- (b) (7 punten) Beschouw de verzameling V van alle functies $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ waarbij er voor iedere f een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat $f(x) < N$ voor alle $x \in \mathbb{N}$. Met andere woorden:

$$V = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{er bestaat een } N \in \mathbb{N} \text{ zodanig dat voor alle } x \in \mathbb{N} \text{ geldt } f(x) < N\}.$$

Bijvoorbeeld: voor $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met $f(x) = 2$ geldt $f \in V$; voor $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met $g(x) = x$ geldt $g \notin V$.

Ga na of V *aftelbaar* (Eng.: countable) is of niet, en geef een bewijs van uw opvatting.

3. Men noemt twee talen A en B *separeerbaar* als er een taal C bestaat zodanig dat $A \subseteq C$ en $B \subseteq \overline{C}$. In dat geval zijn A en B *disjunct* (Eng.: disjoint), ofwel $A \cap B = \emptyset$.

In de twee onderdelen van deze opgave wordt gevraagd te bewijzen dat ieder tweetal disjuncte, *co-Turing-herkenbare* (Eng.: co-Turing-recognizable) talen separeerbaar is door een *beslisbare* (Eng.: decidable) taal.

- (a) (5 punten) Gegeven dat A en B disjuncte, co-Turingherkenbare talen zijn, construeer een deterministische Turingmachine M die een taal C beslist die de talen A en B separeert.
- (b) (5 punten) *Bewijs* dat (i) M een beslisser is, en dat (ii) $L(M) (= C)$ de talen A en B separeert.

4. Beschouw het volgende probleem:

$$D = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een TM die op haar eigen code } \langle M \rangle \text{ termineert}\}.$$

Bewijs met behulp van *mapping reduction* dat D *niet beslisbaar* (Eng.: decidable) is. Uw bewijs dient daarbij uit 2 delen te bestaan:

- (a) (5 punten) Een beschrijving van de *reductie(functie)* f .
- (b) (5 punten) Het bewijs dat deze f inderdaad aan de eisen van een mapping reduction voldoet.

5. (10 punten) Beschouw het volgende probleem:

$$E = \{\langle M \rangle \mid M \text{ is een TM die op geen enkele invoer termineert}\}.$$

Bewijs met behulp van de *recursiestelling* (Eng.: recursion theorem) dat E niet Turing-herkenbaar (Eng.: Turing-recognizable) is.