

Kansrekening en statistiek
WI2105IN–deel I
4 november 2011, 14.00–17.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Een formuleblad wordt uitgereikt.

Meerkeuzevragen

Toelichting: In het algemeen zijn niet altijd twee van de drie alternatieven 100% fout, het juiste antwoord is het meest volledige antwoord. Maak op het bijgeleverde antwoordformulier het hokje behorende bij het door u gekozen alternatief zwart of blauw. Doorstrepen van een fout antwoord heeft geen zin: u moet het òf uitgummen, òf verwijderen met correctievloeistof òf een nieuw formulier invullen. Vergeet niet uw studienummer in te vullen en aan te strepen.

1. We gooien 5 keer met een zuivere munt en zien precies 2 keer kop. Vervolgens gooien we totdat we voor het eerst weer een keer kop zien verschijnen. Dit blijkt 3 worpen te duren. De kans dat dit achtereenvolgens zo gebeurt is

a. $10(1/2)^8$ b. $(1/2)^8$ c. $3(1/2)^8$

2. Voor een stochastische variabele X is gegeven dat $E[X] = 3$ en $\text{Var}(X) = 1$. Dan is $E[2X^2]$ gelijk aan

a. 8 b. 16 c. 20

3. In een vaas zitten 5 lootjes, te weten

A B C D E.

We pakken drie lootjes zonder terugleggen. De kans dat het derde lootje C is, is gelijk aan

a. $1/5$ b. $1/3$ c. $1/10$

4. Stel dat X een uniforme verdeling heeft op $(-2, 1)$. Dan is het 80-ste percentiel gelijk aan

a. $2/5$ b. $4/5$ c. $-6/5$

5. Stel X en Y zijn onafhankelijke stochastische variabelen met een standaardnormale verdeling. Noteer de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling met Φ . Dus $\Phi(x) = P(X \leq x)$. Nu is $P(X + Y > 1)$ gelijk aan

a. $1 - \Phi(1/2)$ b. $1 - \Phi(\sqrt{2})$ c. $1 - \Phi(1/\sqrt{2})$

6. Stel dat stochastische variabelen X en Y onafhankelijk zijn; X is exponentieel verdeeld met parameter 1; en Y is exponentieel verdeeld met parameter 2. Dan is $P(\min(X, Y) > 2)$ gelijk aan

a. e^{-2} b. e^{-4} c. e^{-6}

7. Stel dat de stochastische variabele X kansdichtheid $f(x)$ heeft. Dan wordt de dichtheid van $\frac{1}{2}X$ gegeven door

a. $2f(2x)$ b. $\frac{1}{2}f(x/2)$ c. $\frac{1}{2}f(2x)$

8. Een set kaarten wordt geschud. De kans dat de op 1 na bovenste kaart harten vrouw is, is gelijk aan

a. $1/51$ b. $1/52$ c. $1/(51 \cdot 52)$

9. Stel X is de uitkomst van een worp met een zuivere dobbelsteen. Dan is de verwachting van $|X - 3|$ gelijk aan
- a. $1/2$ b. 0 c. 1.5

10. Zes personen staan op de begane grond voor de lift in een warenhuis met vijf verdiepingen. Ieder persoon kiest onafhankelijk van de andere personen de verdieping waar hij of zij heen wil gaan. We nemen aan dat elk van de verdiepingen dezelfde ‘kans’ heeft om door een willekeurige bezoeker gekozen worden. We voeren drie stochasten in:
- X : het aantal verschillende etages waar de zes personen heen willen.
 Y : het aantal personen dat naar de tweede etage wil.
 Z : de hoogste etage die wordt gekozen.

Welk van de drie heeft een binomiale verdeling?

- a. X b. Y c. Z
11. Gegeven de rij onafhankelijke stochasten $X_1, X_2, \dots$. Iedere X_i is uniform verdeeld op het interval $[-1, 1]$. Voor welke waarde van $a \in \mathbb{R}$ geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^4 - a\right| > 0.0023\right) = 0.$$

- a. $\frac{1}{5}$ b. $\frac{2}{5}$ c. 0
12. Gegeven twee stochasten X en Y , met $\text{Var}(X) = 1/2$ en $\text{Var}(Y) = 2$. Verder geldt dat $\text{Cov}(X, Y) = -1/2$. De correlatie tussen $2X$ en Y is gelijk aan:
- a. $1/\sqrt{2}$ b. $-1/2$ c. $-1/\sqrt{2}$
13. Bij een server komen berichten binnen volgens een Poisson proces. De intensiteit van dit Poisson proces is 2 berichten per 3 minuten. Wat is de kans dat we na ontvangst van een bericht langer dan 20 seconden op een volgend bericht moeten wachten? (afgerond op 2 decimalen)?
- a. 0.22 b. 0.61 c. 0.80
14. Gegeven 3 verschillende dozen. We verdelen 8 (identieke) ballen over de 3 dozen, waarbij in iedere doos tenminste 1 bal komt te zitten en verder
- in de 1ste doos maximaal 3 ballen mogen komen te zitten;
 - in de 2de doos het totaal aantal ballen een even getal moet zijn;
 - in de 3de doos het totaal aantal ballen een oneven getal moet zijn;

Het totaal aantal mogelijke verdelingen is gelijk aan de coëfficiënt van x^8 in het polynoom:

- a. $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(x + x^3 + x^5 + \dots)$
b. $(x + x^2 + x^3)(x^2 + x^4 + \dots)(x + x^3 + x^5 + \dots)$
c. $(x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(x + x^3 + x^5 + x^7)$
15. Een voorbeeld van een deler van het getal 68600 is het getal 35, aangezien 68600 gedeeld door 35 rest nul heeft. Zo is ook bijvoorbeeld 49 een deler van 68600. Het totaal aantal delers van 68600 is gelijk aan:
- Hint: de ontbinding in priemfactoren van 68600 is $2^3 5^2 7^3$.*
- a. 18 b. 70 c. 48

Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Om een ronde tafel staan 6 stoelen. Er komen 4 mannen en 2 vrouwen binnen die op een willekeurige manier een stoel uitzoeken. Definieer de gebeurtenis A door “De twee vrouwen zitten naast elkaar” en B door “Er is een groepje van minstens drie mannen die naast elkaar zitten.”
 - a. Bepaal $P(A)$.
 - b. Gegeven is dat $P(B) = \frac{4}{5}$ (u hoeft dit niet na te gaan). Bereken $P(A|B)$.
2. Het Las Vegas equivalent van Bingo is Keno. Bij dit spel worden zonder terugleggen 20 ballen gepakt uit een bak met 80 ballen, genummerd 1 t/m 80. Een speler zet een dollar in op een nummer uit $\{1, 2, \dots, 80\}$. Als het gekozen nummer op één van de 20 gepakte ballen staat, dan krijgt hij 3 keer zijn inzet uitgekeerd. In het andere geval verliest de speler zijn dollar.
 - a. Geef de kansverdeling van W , de winst bij 1 keer het spel spelen.
 - b. Bereken de verwachting en variantie van W .
3. Gegeven is de stochastische variabele X met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \in [0, 1] \\ \frac{1}{2} & \text{als } x \in (1, 2] \\ 0 & \text{voor alle andere waarden van } x \end{cases}$$

- a. Bereken de verdelingsfunctie F van X . Dus: bereken de $F(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
 - b. Geef aan hoe je een realisatie van X kunt genereren met behulp van een toevalsgetal u . Maak onderscheid tussen de gevallen $u \in (0, 1/2)$ en $u \in [1/2, 1)$.
4. We maken een codewoord met de symbolen ABCDEFG. Ieder codewoord bestaat uit 3 blokken. In ieder blok zit tenminste 1 symbool. Een voorbeeld van een codewoord is

$ACF \quad BD \quad GE$

Bereken het totaal aantal codewoorden dat je kunt formeren.

Hint: bepaal eerst het aantal manieren waarop je de 7 symbolen over de blokken kunt verdelen.

Puntenverdeling bij open vragen:

Opgave:	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4
Punten:	1	2	1	2	2	2	3

Antwoorden multiple choice:

1 a. $\binom{5}{2}(1/2)^8 = 10(1/2)^8$.

2 c. $E[2X^2] = 2E[X^2] = 2(\text{Var}(X) + (E[X])^2) = 2(1 + 3^2) = 20$.

3 a. De marginale kansen zijn bij zonder- en met terugleggen gelijk. Hieruit volgt direct dat de gevraagde kans gelijk is aan $1/5$.

4 a. Los op: $\frac{1}{3}(x + 2) = 0.8$.

5 c. De som $X + Y$ is normaal verdeeld met verwachting nul en variantie 2. Dus

$$P(X + Y > 1) = P\left(\frac{X + Y}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi(1/\sqrt{2}).$$

6 c. Door onafhankelijkheid; is dit gelijk aan $P(X > 2)P(Y > 2) = e^{-2}e^{-2} = e^{-4}$.

7 a. $P(X/2 \leq x) = P(X \leq 2x)$; differentieer nu (vergeet de kettingregel niet).

8 b. In totaal zijn er $52!$ permutaties. Bij $51!$ permutaties is de op 1 na bovenste kaart harten vrouw.

9 c. $|X - 3|$ neemt de waarden 1 en 2 aan met kans $1/3$. De waarden 0 en 3 worden aangenomen met kans $1/6$. Dus

$$E[|X - 3|] = (1 + 2)\frac{1}{3} + (0 + 3)\frac{1}{6} = 1\frac{1}{2}.$$

10 b. X en Z kunnen niet de waarde nul aannemen, dus hebben zeker geen binomiale verdeling. Y heeft dat wel: het 'experiment' op een knop in de lift drukken, met als 'succes' drukken op de knop van de 2de etage (met kans $1/5$), wordt zes keer herhaald. Het aantal 'successen', dus Y , heeft dan een $\text{Bin}(6, 0.2)$ verdeling.

11 a. Volgens de law of large numbers geldt dat

$$a = E[X_1^4] = \int_{-1}^1 x^4 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{5}.$$

12 b. $\text{Cov}(2X, Y) = -2\text{Cov}(X, Y) = -1$. $\text{Var}(2X) = 4\text{Var}(X) = 2$. Dus

$$\rho = \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = -1/2.$$

13 c. De intensiteit per minuut is $\lambda = 2/3$. De tussenaankomst-tijden bij een Poisson proces zijn Exponentiëel verdeeld met parameter $2/3$. Dus de gevraagde kans is $e^{-(2/3)1/3} = e^{-2/9} \approx 0.80$.

14 b. Denk eraan dat in iedere doos tenminste 1 bal moet komen.

15 c. Elke deler bevat 0, 1, 2 of 3 keer een factor 2

0, 1 of 2 keer een factor 5

0, 1, 2 of 3 keer een factor 7.

Het totaal aantal delers is dus $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$.

Antwoorden open vragen:

1 a. Neem de eerste vrouw als referentiepunt: van de overige 5 plaatsen zijn er 2 *naast* haar. Dus $P(A) = \frac{2}{5}$.

b. $P(B) = P(\text{vrouwen zitten niet tegenover elkaar}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.
Omdat $A \subset B$ geldt $A \cap B = A$ en dus $P(A|B) = P(A)/P(B) = \frac{1}{2}$.

2 a.

$$W = \begin{cases} 2 & \text{met kans } \frac{1}{4} \\ -1 & \text{met kans } \frac{3}{4} \end{cases}$$

b.

$$E[W] = 2\frac{1}{4} - 1\frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$E[W^2] = 2^2\frac{1}{4} + (-1)^2\frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$$

$$\text{Var}(W) = 1\frac{3}{4} - \frac{1}{16} = 1\frac{11}{16} \approx 1.69$$

3 a.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

b. Als $u \in (0, 1/2)$, dan $\frac{1}{2}x^2 = u$ en dus $x = \sqrt{2u}$. Als $u \in [1/2, 1)$, dan $\frac{1}{2}x = u$ en dus $x = 2u$.

4 Zij x_i het aantal symbolen in het i -de blok. Bepaal eerst het aantal geheeltallige oplossingen van

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7, \quad x_i \geq 1.$$

In ieder blok moet hoe dan ook 1 symbool, dus er blijven 4 symbolen over om over 3 blokken te verdelen. Hiervoor zijn 2 “schotten” nodig. Het aantal manieren waarop je de 7 posities over de blokken kunt verdelen is dus $\binom{6}{2} = 15$.

Vervolgens kunnen we nog permuteren; er zijn $7!$ permutaties.

Het totaal aantal codewoorden is dus $15 \cdot 7!$.