

Kansrekening en statistiek
wi2105IN-deel I
19 januari 2011, 14.00–17.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Tevens krijgt u een formuleblad uitgereikt—na afloop inleveren alstublieft.

Meerkeuzevragen

Toelichting: In het algemeen zijn niet altijd vijf van de zes alternatieven 100% fout, het juiste antwoord is het meest volledige antwoord. Maak op het bijgeleverde antwoordformulier het hokje behorende bij het door u gekozen alternatief zwart of blauw. Doorstrepen van een fout antwoord heeft geen zin: u moet het òf uitgummen, òf verwijderen met correctievloeistof òf een nieuw formulier invullen. Vergeet niet uw studienummer in te vullen en aan te strepen.

1. De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk en bovendien is bekend dat $P(A | B) = 1/2$ en $P(B | A) = 1/3$. Bereken $P(A \cup B)$.
a. $1/6$ b. $1/3$ c. $1/2$ d. $2/3$ e. $5/6$ f. 1
2. Gegeven de rij onafhankelijke stochasten $X_1, X_2, \dots$. Iedere X_i is uniform verdeeld op het interval $[-1, 1]$. Voor welke waarde van $a \in \mathbb{R}$ geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| - a\right| > 0.01\right) = 0.$$

Hint: gebruik de wet van de grote aantallen.

- a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{3}$ d. 0 e. 1 f. $\frac{3}{4}$
3. Gegeven de standaard normaal verdeelde stochasten X en Y , waarvoor $\text{Var}(X + Y) = 1$. De correlatie tussen X en Y is gelijk aan:
a. 0 b. 1 c. 0.5 d. -1 e. -0.50 f. 0.25
4. Gegeven de volgende beweringen, waarbij X en Y steeds onafhankelijk verondersteld worden.
A Als $X \sim \text{Bin}(n, p_1)$ en $Y \sim \text{Bin}(n, p_2)$, dan $X + Y \sim \text{Bin}(n, p_1 + p_2)$.
B Als $X \sim \text{Unif}(0, 1)$ en $Y \sim \text{Unif}(0, 1)$, dan $X + Y \sim \text{Unif}(0, 2)$.
C Als $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ en $Y \sim \text{Exp}(\mu)$, dan $X + Y \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$.

Welke beweringen zijn waar?

- a. alleen A b. B en C c. alleen B
d. A en B e. geen van alle f. A, B en C
5. Als X uniform verdeeld is op het interval $(0, 2)$, dan is $E[\sqrt{X}]$ gelijk aan
a. $\sqrt{2}$ b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c. 1 d. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ e. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ f. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
6. Laat X een exponentieel verdeelde stochastische variabele zijn met verwachting gelijk aan $1/2$. Bereken $P(X > 5 | X < 6)$.
a. $\frac{1-e^{-10}}{1-e^{-12}}$ b. $e^{-10} - e^{-12}$ c. $\frac{e^{-10}-e^{-12}}{1-e^{-12}}$
d. $1 - \frac{e^{-10}-e^{-12}}{1-e^{-12}}$ e. $2(e^{-10} - e^{-12})$ f. $2\frac{e^{-5}-e^{-6}}{1-e^{-6}}$

7. Gegeven is de onderstaande gezamenlijke kansverdeling van twee discrete stochastische variabelen X en Y :

b	a			$P(Y = b)$
	0	1	2	
-1	1/6	1/6	1/6	1/2
1	0	1/2	0	1/2
$P(X = a)$	1/6	2/3	1/6	1

Dan is $P(|X - Y| = 1)$ gelijk aan:

- a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{6}$ e. $\frac{5}{6}$ f. 1

8. Bij een server komen berichten binnen volgens een Poisson proces. De intensiteit van dit Poisson proces is 3 berichten per 2 minuten. Wat is de kans dat gedurende een halve minuut precies 1 bericht binnenkomt (afgerond op 2 decimalen)?

- a. 0.35 b. 0.83 c. 0.33 d. 0.34 e. 0.75 f. 0.78

9. Op hoeveel manieren kunnen we 7 appels en 6 sinaasappels verdelen onder 4 kinderen, zodanig dat ieder kind ten minste een appel krijgt?

Hint: bekijk eerst op hoeveel manieren de appels verdeeld kunnen worden en dan op hoeveel manieren de sinaasappels verdeeld kunnen worden.

- a. 104 b. 4200 c. 7350 d. 4410 e. 155 f. 1680

10. De coëfficiënt van x^{20} in het polynoom

$$(1 - x)^{-1}(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^6$$

is gelijk aan

Hint: de formule

$$\frac{1}{(1 - x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k - 1}{k} x^k \quad n \in \{1, 2, \dots\}, \quad |x| < 1$$

kan van pas komen.

- a. 9 b. 3003 c. 21 d. 1676 e. 4313 f. 198

11. Laat X een discrete stochast zijn die de waarden 0, 1, 2 en 3 aanneemt, elk met kans $\frac{1}{4}$. De momentgenererende functie van X , geëvalueerd in het punt $t = -1$ is gelijk aan (afgerond op 2 decimalen):

Hint: De momentgenererende functie wordt gedefinieerd door $M(t) = E[e^{tX}]$.

- a. 3.68 b. 1.55 c. 2.26 d. 0.39 e. 0.57 f. 4.67

12. Een vaas is gevuld met 5 rode knikkers en 4 gele knikkers. We pakken 3 knikkers uit de vaas (dus zonder terugleggen). De kans dat we precies 2 rode knikkers pakken is gelijk aan (afgerond op 2 decimalen)

- a. 0.36 b. 0.48 c. 0.12 d. 0.09 e. 0.63 f. 0.72

Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Gegeven de stochast X met een uniforme verdeling op het interval $[0, 1]$. Definieer $Y = X^3$. Bereken de kansdichtheidsfunctie van Y .

Hint: Bereken eerst de verdelingsfunctie van Y . Maak onderscheid tussen de gevallen $y \leq 0$, $y \in (0, 1)$ en $y \geq 1$.

2. Definieer voor $a \in (0, 1]$ de (cumulatieve) verdelingsfunctie

$$F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ x^2 & \text{als } 0 \leq x < a \\ 1 & \text{als } x \geq a \end{cases}.$$

- a. Geef aan hoe je met behulp van een toevalsgetal (gegenereerd door een random number generator, dat wil zeggen, een realisatie uit een uniforme verdeling op het interval $[0, 1]$), uit de verdeling F_1 kunt simuleren.
- b. Hoe simuleer je trekkingen uit $F_{3/4}$?

Hint: maak een schets van de grafiek van de functie $x \mapsto F_a(x)$.

3. Het is bekend dat de kans op kleurenblindheid bij jongens 1 op 20 en bij meisjes 1 op 100 is. Juffrouw Irene heeft een klas met 10 jongens en 20 meisjes.
 - a. Geef voor een willekeurige leerling uit deze klas de kans op kleurenblindheid.
 - b. Geeft de voorwaardelijke kans dat een leerling uit deze klas een jongen is, gegeven dat de leerling kleurenblind is.

Normering: Eindcijfer is

$$(3 * \text{resultaat multiple choice} + 2 * \text{resultaat open vragen}) / 5.$$

Voor de open vragen geldt:

1: 2 punten

2a: 1 punt

2b: 1 punt

3a: 1 punt

3b: 1 punt

