

Kansrekening en statistiek
wi2105IN—deel I
19 januari 2011, 14.00–17.00 uur

Bij dit examen is het gebruik van een (evt. grafische) rekenmachine toegestaan. Tevens krijgt u een formuleblad uitgereikt—na afloop inleveren alstublieft.

Meerkeuzevragen

Toelichting: In het algemeen zijn niet altijd vijf van de zes alternatieven 100% fout, het juiste antwoord is het meest volledige antwoord. Maak op het bijgeleverde antwoordformulier het hokje behorende bij het door u gekozen alternatief zwart of blauw. Doorstrepen van een fout antwoord heeft geen zin: u moet het òf uitgummen, òf verwijderen met correctievloeistof òf een nieuw formulier invullen. Vergeet niet uw studienummer in te vullen èn aan te strepen.

1. De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk en bovendien is bekend dat $P(A | B) = 1/2$ en $P(B | A) = 1/3$. Bereken $P(A \cup B)$.
a. $1/6$ b. $1/3$ c. $1/2$ d. $2/3$ e. $5/6$ f. 1
2. Gegeven de rij onafhankelijke stochasten $X_1, X_2, \dots$. Iedere X_i is uniform verdeeld op het interval $[-1, 1]$. Voor welke waarde van $a \in \mathbb{R}$ geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| - a\right| > 0.01\right) = 0.$$

Hint: gebruik de wet van de grote aantallen.

- a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{3}$ d. 0 e. 1 f. $\frac{3}{4}$
3. Gegeven de standaard normaal verdeelde stochasten X en Y , waarvoor $\text{Var}(X + Y) = 1$. De correlatie tussen X en Y is gelijk aan:
a. 0 b. 1 c. 0.5 d. -1 e. -0.50 f. 0.25
4. Gegeven de volgende beweringen, waarbij X en Y steeds onafhankelijk verondersteld worden.
A Als $X \sim \text{Bin}(n, p_1)$ en $Y \sim \text{Bin}(n, p_2)$, dan $X + Y \sim \text{Bin}(n, p_1 + p_2)$.
B Als $X \sim \text{Unif}(0, 1)$ en $Y \sim \text{Unif}(0, 1)$, dan $X + Y \sim \text{Unif}(0, 2)$.
C Als $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ en $Y \sim \text{Exp}(\mu)$, dan $X + Y \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$.

Welke beweringen zijn waar?

- a. alleen A b. B en C c. alleen B
d. A en B e. geen van alle f. A, B en C
5. Als X uniform verdeeld is op het interval $(0, 2)$, dan is $E[\sqrt{X}]$ gelijk aan
a. $\sqrt{2}$ b. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c. 1 d. $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ e. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ f. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
6. Laat X een exponentieel verdeelde stochastische variabele zijn met verwachting gelijk aan $1/2$. Bereken $P(X > 5 | X < 6)$.
a. $\frac{1-e^{-10}}{1-e^{-12}}$ b. $e^{-10} - e^{-12}$ c. $\frac{e^{-10}-e^{-12}}{1-e^{-12}}$
d. $1 - \frac{e^{-10}-e^{-12}}{1-e^{-12}}$ e. $2(e^{-10} - e^{-12})$ f. $2\frac{e^{-5}-e^{-6}}{1-e^{-6}}$

7. Gegeven is de onderstaande gezamenlijke kansverdeling van twee discrete stochastische variabelen X en Y :

b	a			$P(Y = b)$
	0	1	2	
-1	1/6	1/6	1/6	1/2
1	0	1/2	0	1/2
$P(X = a)$	1/6	2/3	1/6	1

Dan is $P(|X - Y| = 1)$ gelijk aan:

- a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{6}$ e. $\frac{5}{6}$ f. 1

8. Bij een server komen berichten binnen volgens een Poisson proces. De intensiteit van dit Poisson proces is 3 berichten per 2 minuten. Wat is de kans dat gedurende een halve minuut precies 1 bericht binnenkomt (afgerond op 2 decimalen)?

- a. 0.35 b. 0.83 c. 0.33 d. 0.34 e. 0.75 f. 0.78

9. Op hoeveel manieren kunnen we 7 appels en 6 sinaasappels verdelen onder 4 kinderen, zodanig dat ieder kind ten minste een appel krijgt?

Hint: bekijk eerst op hoeveel manieren de appels verdeeld kunnen worden en dan op hoeveel manieren de sinaasappels verdeeld kunnen worden.

- a. 104 b. 4200 c. 7350 d. 4410 e. 155 f. 1680

10. De coëfficiënt van x^{20} in het polynoom

$$(1 - x)^{-1}(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^6$$

is gelijk aan

Hint: de formule

$$\frac{1}{(1 - x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k - 1}{k} x^k \quad n \in \{1, 2, \dots\}, \quad |x| < 1$$

kan van pas komen.

- a. 9 b. 3003 c. 21 d. 1676 e. 4313 f. 198

11. Laat X een discrete stochast zijn die de waarden 0, 1, 2 en 3 aanneemt, elk met kans $\frac{1}{4}$. De momentgenererende functie van X , geëvalueerd in het punt $t = -1$ is gelijk aan (afgerond op 2 decimalen):

Hint: De momentgenererende functie wordt gedefinieerd door $M(t) = E[e^{tX}]$.

- a. 3.68 b. 1.55 c. 2.26 d. 0.39 e. 0.57 f. 4.67

12. Een vaas is gevuld met 5 rode knikkers en 4 gele knikkers. We pakken 3 knikkers uit de vaas (dus zonder terugleggen). De kans dat we precies 2 rode knikkers pakken is gelijk aan (afgerond op 2 decimalen)

- a. 0.36 b. 0.48 c. 0.12 d. 0.09 e. 0.63 f. 0.72

Open vragen

Toelichting: Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Gegeven de stochast X met een uniforme verdeling op het interval $[0, 1]$. Definieer $Y = X^3$. Bereken de kansdichtheidsfunctie van Y .

Hint: Bereken eerst de verdelingsfunctie van Y . Maak onderscheid tussen de gevallen $y \leq 0$, $y \in (0, 1)$ en $y \geq 1$.

2. Definieer voor $a \in (0, 1]$ de (cumulatieve) verdeingsfunctie

$$F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ x^2 & \text{als } 0 \leq x < a \\ 1 & \text{als } x \geq a \end{cases}.$$

- a. Geef aan hoe je met behulp van een toevalsgetal (gegenereerd door een random number generator, dat wil zeggen, een realisatie uit een uniforme verdeling op het interval $[0, 1]$), uit de verdeling F_1 kunt simuleren.
- b. Hoe simuleer je trekkingen uit $F_{3/4}$?

Hint: maak een schets van de grafiek van de functie $x \mapsto F_a(x)$.

3. Het is bekend dat de kans op kleurenblindheid bij jongens 1 op 20 en bij meisjes 1 op 100 is. Juffrouw Irene heeft een klas met 10 jongens en 20 meisjes.
- a. Geef voor een willekeurige leerling uit deze klas de kans op kleurenblindheid.
- b. Geeft de voorwaardelijke kans dat een leerling uit deze klas een jongen is, gegeven dat de leerling kleurenblind is.

Normering: Eindcijfer is

$$(3 * \text{resultaat multiple choice} + 2 * \text{resultaat open vragen}) / 5.$$

Voor de open vragen geldt:

1: 2 punten

2a: 1 punt

2b: 1 punt

3a: 1 punt

3b: 1 punt

Antwoorden multiple choice:

1 d. Door onafhankelijkheid geldt $P(A | B) = P(A) = \frac{1}{2}$ en $P(B | A) = P(B) = \frac{1}{3}$. Merk op dat $P(A \cap B) = P(A | B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Dus $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

2 b. Het gezochte getal a is gelijk aan $E[|X_i|]$. Dus

$$a = \int_{-1}^1 |x| \frac{1}{2} dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

3 e.

$$1 = \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = 2 + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Dus $\text{Cov}(X, Y) = -1/2$. Aangezien X en Y elk variantie 1 hebben, geldt dat de correlatie tussen X en Y gelijk is aan $-1/2$.

4 e. A kan niet waar zijn, neem bijv $p_1 = p_2 = 3/4$.

B is niet waar, zie opgave 11.5 die op het college is voorgemaakt.

C is niet waar, dit is bijv. als volgt in te zien. Als de bewering waar zou zijn, dan zouden de verwachtingen op moeten tellen. Algemeen geldt echter niet dat $1/\lambda + 1/\mu = 1/(\lambda + \mu)$.

5 f.

$$\int_0^2 \sqrt{x} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^2 = \frac{2}{3} \sqrt{2}.$$

6 c. Volgens de definitie van een conditionele kans:

$$P(X > 5 | X < 6) = \frac{P(5 < X < 6)}{P(X < 6)} = \frac{\int_5^6 2e^{-2x} dx}{1 - e^{-12}} = \frac{e^{-10} - e^{-12}}{1 - e^{-12}}.$$

7 d. De gebeurtenis $\{|X - Y| = 2\}$ is gelijk aan $\{X = 0, Y = -1\} \cup \{X = 0, Y = 1\} \cup \{X = 2, Y = 1\}$. De gevraagde kans is dus gelijk aan $1/6 + 0 + 0 = 1/6$.

8 a. De intensiteit per minuut is $3/2$. Het aantal berichten dat gedurende een halve minuut binnenkomt heeft dus een Poisson verdeling met parameter $3/2 \cdot 1/2 = 3/4$. De kans dat er precies 1 bericht gedurende een halve minuut binnenkomt is derhalve $e^{-3/4} \frac{3/4}{1!} \approx 0.35$.

9 f. Zie p.28 Grimaldi. Als we ieder kind een appel geven, dan blijven er 3 appels over om over 4 kinderen te verdelen, dit kan op $\binom{6}{3} = 20$ manieren. De 6 sinaasappels kunnen op $\binom{9}{3} = 84$ manieren verdeeld worden. De productregel geeft dat het totaal aantal manieren om de appels en sinaasappels te verdelen gelijk is aan $20 \times 84 = 1680$.

10 b. Er geldt:

$$\begin{aligned} (1-x)^{-1}(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^6 &= (1-x)^{-1}x^{12} \left[\sum_{i=0}^{\infty} x^i \right]^6 \\ &= x^{12}(1-x)^{-7}. \end{aligned}$$

We zoeken dus de coëfficiënt van x^8 in $(1-x)^{-7} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+6}{k} x^k$. Deze is dus gelijk aan $\binom{14}{8} = 3003$.

11 d. Gevraagd is $M(t) = E[e^{tX}]$ in het punt $t = -1$. Dus

$$M(-1) = \frac{1}{4} \left(e^{0 \cdot (-1)} + e^{1 \cdot (-1)} + e^{2 \cdot (-1)} + e^{3 \cdot (-1)} \right) = (1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3})/4 \approx 0.39.$$

12 b. Het aantal manieren om 3 knikkers uit een vaas met 9 knikkers te pakken is $\binom{9}{3}$. Het aantal manieren om 2 rode te pakken, en dus 1 gele erbij, is gelijk aan $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1}$ (productregel). De gevraagde kans is dus gelijk aan

$$\frac{\binom{5}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} \approx 0.48.$$

Antwoorden open vragen:

1 Aangezien X waarden in $[0, 1]$ aanneemt, doet Y dat ook. De dichtheid van Y is dus gelijk aan nul buiten het interval $[0, 1]$. Voor $y \in [0, 1]$ geldt

$$P(Y \leq y) = P(X^3 \leq y) = P(X \leq \sqrt[3]{y}) = \sqrt[3]{y}.$$

De dichtheid van Y voor $y \in [0, 1]$ is dus gelijk aan $\frac{d}{dy} \sqrt[3]{y} = \frac{1}{3} y^{-2/3} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{y^2}}$.

2 a. Als u het toevalsgetal is, dan vindt je $y \geq 0$ uit de vergelijking $y^2 = u$. Hieruit volgt dat $y = \sqrt{u}$.

b. Met $u \in [3/4, 1]$, stel dan $y = 3/4$. Als $y \in [0, 3/4)$, stel dan $y = \sqrt{u}$.

3 Als we willekeurig een leerling uit de klas kiezen, dan geldt $P(J) = 1/3$ en $P(M) = 2/3$. Laat K de gebeurtenis zijn dat een leerling kleurenblind is. Gegeven is dat $P(K | J) = 1/20$ en $P(K | M) = 1/100$.

a. Gevraagd is $P(K)$. Er geldt

$$P(K) = P(K | J) P(J) + P(K | M) P(M) = \frac{1}{20} \frac{1}{3} + \frac{1}{100} \frac{2}{3} = \frac{7}{300} \approx 0.023$$

b. Gevraagd is $P(J | K)$. Er geldt

$$P(J | K) = \frac{P(K | J) P(J)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{20} \frac{1}{3}}{\frac{7}{300}} = \frac{5}{7} \approx 0.71$$